

**ГОУ ВПО РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ)  
УНИВЕРСИТЕТ**

Составлен в соответствии с государственными требованиями к минимумусодержания и уровню подготовки выпускников по направлению "Торговое дело" и Положением "Об УМКД РАУ"

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института

Арамян Ж.Б.



18 июля 2023, №2

**Институт: Экономики и Бизнеса**

**Кафедра: Математических методов и информационных технологий в экономике и бизнесе**

**Автор(ы):** Саакян Карен Пайкарович, к.ф.м.н., доцент

***УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС***

**Дисциплина: Б1.Б.03 Линейная алгебра**

Для бакалавриата: **Направление: 38.03.06 Торговое дело**

## **ЕРЕВАН**

### **1. Аннотация**

Курс содержит основные разделы теории матриц, определителей, систем линейных уравнений, векторов и линейных пространств, а также элементы аналитической геометрии. Цель дисциплины создание математической базы для курсов: «математические методы в экономике», «экономико-математическое моделирование», «математическое программирование», «эконометрика», «статистика». Задачи дисциплины подготовка слушателей в области важнейших алгебраических понятий и методов, используемых в экономических исследованиях.

### **Краткое описание содержания данной дисциплины**

Целью дисциплины «Линейная алгебра» является знакомство с базовыми понятиями теории линейных и евклидовых пространств, матричного анализа, аналитической геометрии и линейного программирования. Материал иллюстрирован примерами приложения основных результатов к построению и анализу экономических моделей.

### **1.1. Трудоемкость в академических кредитах и часах, формы итогового контроля**

#### **(экзамен/зачет)**

Общая трудоемкость дисциплины – 144 академических часов (4 академических кредита). Курс рассчитан на 8 часов лекций и 8 часов практических занятий, а также на 119 часов самостоятельной работы студентов, которая будет заключаться в выполнении домашних заданий и подготовке к промежуточным контролям.

### **1.2. Взаимосвязь дисциплины с другими дисциплинами учебного плана специальности (направления)**

Изучение дисциплины «Линейная алгебра» необходимо для изучения таких дисциплин, как: «Теория вероятностей и математическая статистика», «Экономическая теория», «Макроэкономика», «Микроэкономика», «Финансовые вычисления», «Эконометрика», «Экономические приложения линейного программирования».

Дисциплина «Линейная алгебра» изучается в 1-ом году обучения.

### **1.3. Требования к исходным уровням знаний и умений студентов для прохождения дисциплины**

Дисциплина «Линейная алгебра» предназначена для студентов 1-го курса бакалавриата направления «Экономика». Предполагается, что студенты владеют базисными знаниями и умениями в области математики в пределах, определяемых школьным курсом математики.

## **2. Учебная программа**

### **2.1 Цели и задачи дисциплины**

Изучение дисциплины «Линейная алгебра» является важной составной частью подготовки бакалавра и имеет следующие основные цели:

- познакомить студентов с основами аппарата высшей математики для решения теоретических и практических задач экономики;
- воспитать абстрактное мышление, не привязанное к конкретным условиям и обстоятельствам;
- развить логическое мышление, научить строить логические цепочки рассуждений, в начале которых стоят не вызывающие сомнения факты и положения, а в конце –правильные выводы;
- выработать навыки к математическому исследованию экономических проблем;
- формирование личности студента, развитие его интеллекта и умения логически и алгоритмически мыслить;
- формирование научного мировоззрения у студентов;
- формирование математических знаний, умений и навыков, необходимых для изучения других общенаучных и специальных дисциплин;

К задачам дисциплины относятся:

- обучение студентов основам линейной алгебры и математического, используемого при решении теоретических и практических задач в области экономики, финансов и бизнеса;
- развитие навыков в применении математического аппарата - важного инструмента экономического анализа, организации и управления;
- научить студентов приемам исследования и решения математически формализованных задач;
- развитие у студентов логического и аналитического мышления;
- развить навыки самостоятельной работы с математической литературой.

### **2.2 Требования к уровню освоения содержания дисциплины**

Студент, освоивший дисциплину будет:

**Знать**

- Арифметические векторы и линейные действия над ними. Векторное представление экономических данных. Вектор конечного потребления.
- Типы матриц и основные действия над ними. Технологическая матрица. Оценка инфляции. Индекс Ласпейреса и Пааше. Модель Тирбергера. Модель Леонтьева. Матрица прямых затрат.
- Основные понятия системы линейных неоднородных уравнений. Решение и псевдорешение системы. Метод наименьших квадратов .
- Метод Крамера для решения систем линейных уравнений. Портфельная теория Марковица.
- Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений.
- Метод Гаусса-Жордана решения квадратичных систем линейных уравнений. Оптимизационные задачи экономики.
- Методы решения задач линейного программирования.
- Методы линейной алгебры для решения экономических задач различного класса.

**Уметь**

- Осуществлять операции над векторами, устанавливать линейную зависимость и независимость векторов и применять в ходе решения экономических задач.
- Вычислять определитель матрицы, решать системы линейных уравнений методом Крамера в модели Леонтьева.
- Проверять матрицу на невырожденность, обращать невырожденные матрицы в модели Леонтьева.
- Решать системы линейных уравнений методом Гаусса и Гаусса-Жордана. Выражать решение неоднородной системы через одно частное решение неоднородной системы и фундаментальную систему решений приведенной однородной системы. Находить валовый выпуск отрасли.
- Раскладывать матрицы по матрицам полного ранга. Находить псевдорешение неоднородной несовместной или неопределенной системы линейных уравнений. Применять в задачах эконометрики.
- Находить координаты вектора в различных базисах, вычислять матрицу линейного оператора в различных базисах.

- Решать прямую и двойственную задачи линейного программирования. Решать задачи о распределении ресурсов, теневых цен ресурсов, а также решать транспортные задачи и задачи о максимальном потоке, а также игры с нулевой суммой.
- Решать экономические задачи с помощью методов линейной алгебры с использованием современных программных пакетов (Microsoft Excel, Mathematica, R, Python).

**Владеть (способен продемонстрировать)**

- Навыками решения систем линейных уравнений для экономических задач.
- Навыками выполнения основных действий над векторами и матрицами при исследовании экономических моделей.
- Навыками решения задач линейного программирования применительно к различному классу экономических задач.
- Навыками решения различных классов экономических задач с использованием методов линейной алгебры.

(ОК-1) - способностью использовать основы философских знаний для формирования мировоззренческой позиции

(ОК-2) - способностью анализировать основные этапы и закономерности исторического развития общества для формирования гражданской позиции

(ОПК-2) - способностью осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач

(ОПК-3) - способностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы

**2.3 Трудоемкость дисциплины и виды учебной работы (в академических часах и зачетных единицах) (см. Таблица 1)**

**Таблица 1.**

**Таблица трудоемкости дисциплин и видов учебной работы**

Виды учебной работы	Всего, в акад. часах	Распределение по годам
		1 год
1	2	3
<b>1. Общая трудоемкость изучения дисциплины по семестрам, в т. ч.:</b>	<b>144</b>	<b>144</b>
1.1. Аудиторные занятия, в т. ч.:	<b>16</b>	<b>16</b>
1.1.1. Лекции	<b>8</b>	<b>8</b>
1.1.2. Семинары	<b>8</b>	<b>8</b>
1.2. Самостоятельная работа	<b>128</b>	<b>128</b>
1.3. Консультации		
Итоговый контроль	экзамен	экзамен

## 2.4 Содержание дисциплины

Разделы дисциплины с указанием видов занятий (лекции, семинарские самостоятельные работы и консультации) и их трудоёмкость в академических часах и зачетных единицах (см. Таблица 2).

**Таблица 2. Тематический план и трудоемкость аудиторных занятий (модули, разделы дисциплины и виды занятий) по учебному плану**

Разделы и темы дисциплины	Всего (ак. часов)	Лекции (ак. часов)	Семинары (ак. часов)
			1 семестр
1	2=3+4	3	4
Модуль 1			

Тема 1.1. Векторное представление экономических данных и операции с ними	2	1	1
Тема 1.2. Матричная алгебра, модель Леонтьева	2	1	1
Тема 1.3. Определитель матрицы. Нахождение валового выпуска отрасли методом Крамера в модели Леонтьева	2	1	1
Тема 1.4. Невырожденные матрицы. Обратная матрица. Нахождение выпуска товара по матрице прямых затрат.	2	1	1
Модуль 2			
Тема 2.1. Решение системы линейных уравнений. Метод Гаусса и Гаусса-Жордана.	2	1	1
Тема 2.2. Метод наименьших квадратов в задачах эконометрики	2	1	1
Тема 2.3. Линейные пространства и линейные операторы. Распределения	2	1	1
Тема 2.4. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора (матрицы). Продуктивности линейной модели Леонтьева	2	1	1
ИТОГО	16	8	8

### Содержание тем учебной дисциплины

#### Форма 2. Содержание разделов и тем дисциплины

##### Модуль 1

**Тема 1.1.** (Векторное представление экономических данных и операции с ними)

- Предварительные понятия. Предмет линейной алгебры и матричного анализа.
- Действительные (вещественные) и комплексные числа.
- Извлечение корней  $n$ -й степени из комплексного числа.
- Основная теорема алгебры.
- Предмет линейной алгебры и его приложения к экономическим задачам.
- Арифметические векторы. Операции над векторами.
- Алгебраические свойства векторов.
- Геометрическая интерпретация векторов.
- Линейная независимость.
- Скалярное произведение двух векторов.
- Определение матрицы. Типы матриц.
- Матрицы специального вида. Определитель матрицы.
- След матрицы.
- Транспонирование матрицы.
- Арифметические векторы. Операции над векторами. Векторное представление экономических данных и операции с ними.
- Определение матрицы. Типы матриц. Оценка инфляции: вычисления индекса Ласпейреса и индекса Пааше.
- След матрицы. Производство и потребление продуктов в разных районах.
- Геометрический смысл линейной зависимости векторов.

**Тема 1.2. Матричная алгебра. Модель Леонтьева**

- Матричная алгебра
- Ранг матрицы. Неравенства о рангах матриц
- Сумма и произведение матриц
- Единичная матрица
- Произведение Кронекера матриц
- Квадратные матрицы
- Степень матрицы
- Многочлен от матриц
- Элементарные матричные преобразования
- Приведение матрицы к ступенчатому виду
- Каноническая форма матрицы.
- Сумма и произведение матриц, определение стоимости сырья
- Модель Тинбергена макроэкономической политики
- Технологическая матрица
- Модель Леонтьева

**Тема 1.3 Определитель матрицы. Нахождение валового выпуска отрасли методом Крамера в модели Леонтьева**

- Определитель матрицы
- Перестановка. Четность и нечетность перестановки.
- Определение определителя. Определитель и элементарные операции.
- Разложение Лапласа по строкам или столбцам.
- Основные свойства определителя.
- Примеры вычисления определителя специального вида.
- Определитель блочной и блочно-треугольной матриц.
- Подматрица. Главная подматрица.
- Минор, главный минор, ведущий главный (угловой) минор.
- Минор элемента, алгебраическое дополнение элемента матрицы.
- Решение квадратной системы линейных уравнений методом Крамера.
- Нахождение валового выпуска отрасли методом Крамера в модели Леонтьева.
- Решение квадратной системы линейных уравнений методом Крамера.
- Портфельная теория Марковица.

**Тема 1.4. Невырожденные матрицы. Обратная матрица. Нахождение выпуска товара по матрице прямых затрат.**

- Невырожденные матрицы. Определение невырожденной матрицы.
- Обратная матрица.
- Присоединенная матрица.
- Эквивалентные условия невырожденности (обратимости) матрицы.
- Определитель и обратная матрица.
- Связь между максимальным порядком ненулевого минора и рангом матрицы.
- Матрицы полного ранга.
- Решение квадратной системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
- Матричные уравнения.
- Нахождение выпуска товара по матрице прямых затрат (matrix of input coefficients) и вектору конечного потребления (households' demand).

**Тема 2.1. Решение системы линейных уравнений. Метод Гаусса и Гаусса-Жордана.**

- Система линейных неоднородных уравнений общего вида.
- Совместность и несовместность системы, структура множества решений.
- Теорема Кронекера-Капелли.
- Метод Гаусса и Гаусса-Жордана.
- Система однородных уравнений.
- Условие единственности решения однородной системы.
- Фундаментальная система решений однородной системы.
- Общее решение неоднородной системы.
- Экономические примеры: обмен  $m$  товарами между  $n$  агентами, при ценах товаров, обеспечивающих нулевые прибыли; расчет выпуска товара по спросу конечной и внутренней потребностей
- Решение матричных уравнений и нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

### **Тема 2.2. Метод наименьших квадратов в задачах эконометрики**

- Решение и псевдорешение системы (в том числе несовместной) линейных уравнений с произвольной матрицей коэффициентов.
- Псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу. О единственности нормального псевдорешения.
- Методы нахождения нормального псевдорешения.
- Разложение матрицы по матрицам полного ранга (скелетное разложение).
- Матричный метод наименьших квадратов.
- Метод наименьших квадратов в задачах эконометрики
- Геометрический смысл метода наименьших квадратов.

### **Тема 2.3. Линейные пространства и линейные операторы. Распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики в матричном виде**

- Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств.
- Линейная независимость векторов пространства.

- Базис. Теорема о базисе.
- Размерность линейного пространства. Изменение базиса.
- Матрица перехода.
- Преобразование координат при изменении базиса.
- Линейная оболочка.
- Разложения пространства в прямую сумму.
- Линейные операторы: определение.
- Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
- Образ, ядро линейного преобразования. О сумме размерностей образа и ядра.
- Свойства скалярного произведения.
- Неравенство Коши-Буняковского.
- Ортогонализация Грама-Шмидта.
- Расстояние от вектора до подпространства.
- Матрица Грама. Матрица скалярного произведения.

#### **Тема 2.4. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора (матрицы).**

##### **Продуктивности линейной модели Леонтьева**

- Определение собственного значения и собственного вектора.
- Характеристический многочлен матрицы.
- Спектр линейного оператора (матрицы).
- Теорема Гамильтона-Кэли.
- Спектральный радиус.
- Сингулярные числа и сингулярное разложение матрицы (общее понятие).
- О диагонализуемости матрицы линейного преобразования.
- Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значения.
- Подобные матрицы: матрицы одного и того же линейного преобразования.
- О спектре действительных симметричных матриц. Локализация собственных значений.
- Условие неразложимости неотрицательной матрицы.
- Теорема Перрона-Фробениуса.

- Продуктивные матрицы. Критерии продуктивности.
- Продуктивность линейной модели Леонтьева.
- Минимальный многочлен матрицы. Жорданова форма.

## 2.5 Модульная структура дисциплины с распределением весов по формам контролей (см. таблица 3)

Таблица 3. Распределение весов по видам контролей

Формы контролей	Веса форм текущих контролей в результирующих оценках текущих контролей			Веса форм промежуточных контролей в оценках промежуточных контролей			Веса оценок промежуточных контролей и результирующих оценок текущих контролей в итоговых оценках промежуточных контролей			Веса итоговых оценок промежуточных контролей в результирующей оценке промежуточных контролей	Веса результирующей оценки промежуточных контролей и оценки итогового контроля в результирующей оценке итогового контроля
	M1 <sup>1</sup>	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3		
Вид учебной работы/контроля	M1 <sup>1</sup>	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3		
Контрольная работа				1							
Тест											
Курсовая работа											
Лабораторные работы											
Письменные домашние задания	0,5										
Реферат											
Эссе											
Другие формы (Опрос)	0,5										
Другие формы (Указать)											
Веса результирующих оценок текущих контролей в итоговых оценках промежуточных контролей							0,5				
Веса оценок промежуточных контролей в итоговых оценках промежуточных контролей							0,5				
Вес итоговой оценки 1-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей										1	
Вес итоговой оценки 2-го											

<sup>1</sup> Учебный Модуль

промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей											
Вес итоговой оценки 3-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей											
Вес результирующей оценки промежуточных контролей в результирующей оценке итогового контроля											0,4
<b>Экзамен (оценка итогового контроля)</b>											0,6
	$\Sigma = 1$										

### 3. Теоретический блок

#### 3.1 Материалы по теоретической части курса

##### Учебники

- Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, И. М. Тришин; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 422 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10169-0. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/442442> (дата обращения: 21.02.2021).
- Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры – М.: Наука, любое издание.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, любое издание.
- Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа (под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича) – М.: Наука, любое издание после 1981.

#### 3.2 Учебные пособия

- Скорняков Л.А. Элементы линейной алгебры. Учебное пособие. – М.: Наука, 1980.
- Шевцов Г.С. Линейная алгебра. Учебное пособие. – М.: Гардарики, 1999.

### 4. Практический блок

##### Задачники (практикумы)

- Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре/И.В.Проскуряков.-9-е издание.-М:БИНОМ. Лаборатория знаний,2005-383с.:ил.(Классический университетский учебник)

- Золотаревская Д.И. Сборник задач по линейной алгебре. Изд. 2-е, доп. - М., 2004. - 184с.

## **5. Блок ОДС и КИМ**

### **5.1 Материалы по оценке и контролю знаний**

- а. Перечень экзаменационных вопросов
- б. Комплексные числа, алгебраические операции над комплексными числами.
7. Модуль комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.
8. Определение матрицы. Типы матриц.
9. Матрицы специального вида. Определитель матрицы.
10. След матрицы. Транспонирование матрицы.
11. Арифметические векторы. Операции над векторами.
12. Сложение и произведение матриц. Единичная матрица.
13. Определитель матрицы. Перестановка. Четность и нечетность перестановки.
14. Понятие определителя. Определитель и элементарные операции.
15. Разложение Лапласа по строкам или столбцам.
16. Основные свойства определителя. Примеры вычисления определителя специального вида.
17. Минор, главный минор. Минор элемента, алгебраическое дополнение элемента матрицы.
18. Решение квадратной системы линейных уравнений методом Крамера.
19. Невырожденные матрицы. Определение невырожденной матрицы. Обратная матрица.
20. Определители второго и третьего порядка, правило Сарруса.
21. Ранг матрицы. Методы нахождения ранга матрицы.
22. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса и Гаусса-Жордана.
23. Исследование системы линейных уравнений. Теорема Кронекера—Капелли.
24. Линейное пространство, базис.
25. Линейная комбинация. Линейная зависимость и независимость.
26. Собственные значения и собственные векторы.

### **5.2 Образец заданий итогового контроля**

Итоговый контроль

ВАРИАНТ I

I. Найти определитель

$$A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

II. Найти определитель

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Разложением по строке или столбцу
2. Приведением к треугольному виду

III. Найти определитель

$$A \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

IV. Решить матричное уравнение вида

$$AX + 2E = B * B^T + C, \text{ где}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ВАРИАНТ II

I. Найти определитель

$$A \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

II. Найти определитель

$$A \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Разложением по строке или столбцу
2. Приведением к треугольному виду

III. Найти определитель

$$A \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

IV. Решить матричное уравнение вида

$$AX + 2E = B * B^T + C, \text{ где}$$

$$A \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

## 6. Методический блок

### 6.1 Методика преподавания, обоснование выбора данной методики

На каждом занятии вначале будет выделено время для объяснения теоретического материала. Далее студенты будут работать над предложенными примерами и задачами для применения практических навыков пройденной темы.

Данная дисциплина как уже было указано в начале связана со всеми дисциплинами учебного плана направления «Экономика», а именно с дисциплинами:

«Теория вероятностей и математическая статистика», «Экономическая теория», «Макроэкономика», «Микроэкономика», «Финансовые вычисления», «Эконометрика», «Экономические приложения линейного программирования».

Межпредметные связи при изучении предмета «Линейная алгебра», являются важным средством достижения прикладной направленности обучения. Возможность подобных связей обусловлена тем, что в предмете «Линейная алгебра» и смежных дисциплинах изучаются одноименные понятия (векторы, координаты, матрицы, определители, теоремы матричной теории и т.д.), а математические средства выражения зависимостей между величинами

(формулы, графики, таблицы, уравнения, неравенства) находят применение при изучении смежных дисциплин. Такое взаимное проникновение знаний и методов в различные учебные предметы имеет не только прикладную значимость, но и создает благоприятные условия для формирования научного мировоззрения. Они являются важным средством достижения прикладной направленности обучения предмету «Линейной алгебры».