

**ГОУ ВПО Российско-Армянский (Славянский)
университет**

Утверждено
Директор Института
Математики и Информатики
Дарбинян А.А.
«18» июня 2024, протокол №15



УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины: Теория алгоритмов и математическая логика

Автор (ы) Чубарян Анаит Арташесовна, д.ф.-м.н., профессор
Ф.И.О, ученое звание (при наличии), ученая степень (при наличии)

**Направление подготовки: «Прикладная математика и информатика»
01.03.02**

1. АННОТАЦИЯ

1.1. Краткое описание содержания данной дисциплины;

«Теория алгоритмов и математическая логика» включает в себя два предмета. Предмет теория алгоритмов изучает возможности эффективных вычислений уточнением понятия «алгоритм». В нашем курсе акцентируется внимание на двух уточнениях: рекурсивных функциях и вычислимости по Тьюрингу. Доказывается их эквивалентность, вводится понятие универсальной функции, доказывается ее существование. Вводится понятие разрешимых и неразрешимых задач. Приводятся примеры неразрешимых проблем.

Предмет “Математическая логика”, применяя математический аппарат, формализует и каталогизирует правильные способы рассуждений с целью их приложения к более детальному и глубокому изучению математических дисциплин. Точно и адекватно определив понятие “математическое доказательство”, позволяет избежать ошибочных рассуждений и неверных утверждений, а также выявить основные свойства формализуемых теорий.

1.2. Трудоемкость в академических кредитах и часах, формы итогового контроля (экзамен/зачет)

Кредиты - 6, общая трудоемкость изучения дисциплины -216 часов, форма итогового контроля: экзамен.

1.3. Взаимосвязь дисциплины с другими дисциплинами учебного плана специальности

Элементы теории множеств, теории булевых функций, школьный курс арифметики.

1.4. Результаты освоения программы дисциплины:

Код компетенции	Наименование компетенции	Код индикатора достижения компетенций	Наименование индикатора достижений компетенций
ПК- 7	способностью к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного	ПК- 7.1 ПК- 7.2 ПК- 7.3	Знать методы и технологии разработки и применения системного и прикладного программного обеспечения

	программного обеспечения		<p>Разрабатывать и применять алгоритмические и программные решения в области системного и прикладного программного обеспечения</p> <p>Владеть способностью разрабатывать и применять алгоритмические и программные решения в области системного и прикладного программного обеспечения</p>
ОПК-3	Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 ОПК-3.2 ОПК-3.3	<p>Демонстрирует умение анализировать, модифицировать и использовать математические модели в области профессиональной деятельности</p> <p>Умеет выбирать методы исследования математических моделей; строить и исследовать математические модели, применять и модифицировать их для решения задач в области профессиональной деятельности</p> <p>Владеет навыками применения математического аппарата к исследуемым математическим моделям</p>

2. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА

2.1. Цели и задачи дисциплины

После прохождения дисциплины студент должен:

- Познакомиться с множеством вычислимых функций, с тезисами Чёрча и Тьюринга.
- Знать понятие универсальной функции, её значимость, её свойства.
- Различать разрешимые и неразрешимые проблемы.
- Формализовать и систематизировать правильные способы рассуждений, проявить навыки формализованных представлений различных утверждений, дать точное и адекватное понятие “математического доказательства”.
- Познакомить со способами формализаций различных теорий и проявить навыки работы с формальными выводами.
- Определить основные свойства и требования, предъявляемые к формальным теориям. Установить факт наличия или отсутствия тех или иных свойств у различных формальных теорий.

2.2. Трудоемкость дисциплины и виды учебной работы (в академических часах и зачетных единицах)

Виды учебной работы	Всего часов	Количество часов по семестрам							
		1 сем.	2 сем.	3 сем.	4 сем.	5 сем.	6 сем.	7 сем.	8 сем.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. Общая трудоемкость изучения дисциплины по семестрам, в т. ч.:	216			108	108				
1.1. Аудиторные занятия, в т. ч.:	136			68	68				
1.1.1. Лекции	68			34	34				
1.1.2. Практические занятия	36			36	36				
3. Самостоятельная работа,	45			11	11				
4. Контроль	63			27	27				
5. Кредиты	6			3	3				
4. Форма итогового контроля: Экзамен/Зачет	экз.			экз.	экз.				

2.3. Содержание дисциплины

2.3.1. Тематический план и трудоемкость аудиторных занятий (модули, разделы дисциплины и виды занятий) по рабочему учебному плану

Теория алгоритмов

Разделы и темы дисциплины	Всего ак. часов	Лекции, ак. часов	Практ. занятия, ак. часов	Семинары, ак. часов	Лабор, ак. часов	Другие виды занятий, акр. часов
1	3=4+5+6+7+8	4	5	6	7	8
Модуль 1. Рекурсивные функции и						

функции, вычислимые по Тьюрингу						
Введение	2	2				
Раздел 1.. Рекурсивные функции						
Тема 1.1. Определение рекурсивных функций	4	2	2			
Тема 1.2. Обоснование рекурсивности множества известных функций.	8	4	4			
Тема 1.3. Дополнительные операции, не нарушающие примитивную (общую) рекурсивность: ограниченные сумма, произведение, минимизация. Общая (возвратная) рекурсия. Рекурсивные предикаты, результаты применения конечного числа логических операций к ним. Лемма о разветвлении.	9	4	5			
Тема 1.4 Определите машины Тьюринга, операции над ними, вычислимость по Тьюрингу рекурсивных функций.	8		8			
Раздел 2. Нумерации, универсальные функции						
Тема 2.1 Нумерация Кантора, Клини и Гёделя n -ок натуральных чисел	6	4	2			
Тема 2.2 Нумерация машин Тьюринга. Арифметизация процесса работы машины Тьюринга	6	6				
Тема 2.3 Определение универсальной ф-ии, теорема о существовании универсальной ф-ии. Свойства универсальных ф-ий. Теорема Клини о нормальной форме представления ч.р.ф..	9	4	5			
Модуль 2. Распознаваемые и полураспознаваемые множества						
Раздел 1 Распознаваемые множества и их свойства						
Тема 1.1 S - n - m теорема. Теорема о	1	1				

неподвижной точке.						
Тема 1.2 Распознаваемые (рекурсивные) множества и операции над ними.	4	2	2			
Тема 1.3 Теорема Райса-Маркова.	1	1				
Тема 1.4 Полураспознаваемые (рекурсивно-перечислимые) множества (первое и второе определения) и операции над ними.	2	1	1			
Раздел 2. Полураспознаваемые множества, неразрешимые проблемы						
Тема 2.1 Третье и четвертое определения полураспознаваемых множеств. Теорема Поста. Проблемы применимости и самоприменимости.	5	2	3			
Тема 2.2 Операции поиска определенности и поиска нулей. Пятое - седьмое определения полураспознаваемых множеств	5	1	4			
Тема 2.3 Сводимость множеств, универсальные множества.	2	2				

Математическая логика

Разделы и темы дисциплины	Всего ак. часов	Лекции, ак. часов	Семинары, ак. часов	Лабор, ак. часов	Другие виды занятий, акр. часов
1	3=4+5+6+7+8	4	6	7	8
Модуль 1. Исчисление высказываний и исчисление предикатов					
Введение	2	2			
Раздел 1.. Исчисление высказываний					
Тема 1.1. Аксиоматическое определение исчисления высказываний	4	2	2		
Тема 1.2. Дополнительные правила выводов, примеры выводимых формул	8	3	5		
Тема 1.3 Полнота, непротиворечивость и	6	2	4		

разрешимость исчисления высказываний					
Тема 1.4 Независимость аксиом. Возможности введения других аксиоматик	5	3	2		
Раздел 2. Исчисление предикатов					
Тема 2.1 Язык исчисления предикатов, основные требования	4	2	2		
Тема 2.2 Интерпретации, свойства	6	2	4		
Тема 2.3 Аксиоматическое определение чистого исчисления предикатов, свойства	7	3	4		
Модуль 2. Формальная арифметика					
Раздел 1 Формализация арифметики					
Тема 1.1 Язык и аксиоматизация арифметики	4	2	2		
Тема 1.2 Введение дополнительных правил вывода	4	2	2		
Тема 1.3 Выводы основных арифметических формул	12	6	6		
Тема 1.4 Введение новых функций и предикатов	4	2	2		
Раздел 2. Непротиворечивость и неполнота арифметики					
Тема 2.1 Нумерация объектов формальной арифметики	2	1	1		
Тема 2.2 Соотношения между номерами объектов арифметики	2	2			
Тема 2.3 Теорема Геделя о неполноте арифметики. Непротиворечивость арифметики	2	2			

2.3.2. Краткое содержание разделов дисциплины в виде тематического плана Теория алгоритмов

Модуль 1.	
Введение	Ознакомление с целями и задачами теории алгоритмов
Раздел 1	Рекурсивные функции и машины Тьюринга
Тема 1.1	Определение рекурсивных функций
Тема 1.2	Обоснование рекурсивности множества известных функций
Тема 1.3	Дополнительные операции, не нарушающие примитивную (общую) рекурсивность:

	ограниченные сумма, произведение, минимизация. Общая (возвратная) рекурсия. Рекурсивные предикаты, результаты применения конечного числа логических операций к ним. Лемма о разветвлении
Тема 1.4	Определение машин Тьюринга, операции над ними, вычислимость по Тьюрингу рекурсивных функций
Раздел 2	Нумерации, универсальные функции
Тема 2.1	Нумерация Кантора, Клини и Гёделя n -ок натуральных чисел
Тема 2.2	Нумерация машин Тьюринга. Арифметизация процесса работы машины Тьюринга
Тема 2.3	Определение универсальной ф-ии, теорема о существовании универсальной ф-ии. Свойства универсальных ф-ий. Теорема Клини о нормальной форме представления ч.р.ф.

Модуль 2	Распознаваемые и полураспознаваемые множества
Раздел 1	Распознаваемые множества и их свойства
Тема 1.1	S-n-m теорема. Теорема о неподвижной точке
Тема 1.2	Распознаваемые (рекурсивные) множества и операции над ними
Тема 1.3	Теорема Райса-Маркова
Тема 1.4	Полураспознаваемые (рекурсивно-перечислимые) множества (первое и второе определения) и операции над ними
Раздел 2	Полураспознаваемые множества, неразрешимые проблемы
Тема 2.1	Третье и четвертое определения полураспознаваемых множеств. Теорема Поста. Проблемы применимости и самоприменимости
Тема 2.2	Операции поиска определенности и поиска нулей. Пятое - седьмое определения полураспознаваемых множеств
Тема 2.3	Сводимость множеств, универсальные множества.

Математическая логика

Модуль 1.	
Введение	Ознакомление с целями и задачами математической логики
Раздел 1	Исчисление высказываний
Тема 1.1	Аксиоматическое задание исчисления высказываний, определение вывода, примеры
Тема 1.2	Дополнительные правила вывода: теорема дедукции, правила суппозицизма;

	примеры выводимых формул
Тема 1.3	Лемма Кальмара, теорема о полноте исчисления высказываний; непротиворечивость и разрешимость исчисления высказываний
Тема 1.4	Независимость аксиом. Возможность введения иных аксиоматик
Раздел 2	Исчисление предикатов
Тема 2.1	Необходимость введения языка предикатов, формализация языка предикатов; свободные переменные замкнутые формулы; условные допускимости замещения термами
Тема 2.2	Понятие интерпретации, изоморфные интерпретации, модели, логическая общезначимость
Тема 2.3	Аксиоматическое задание теорий первого порядка. Непротиворечивость. Теорема дедукции. Полнота (Теорема Гегеля).

1.

Модуль 2	Формальная арифметика
Раздел 1	Формализация арифметики
Тема 1.1	Язык и аксиоматизация арифметики
Тема 1.2	Введение дополнительных правил вывода: правило индукции, транзитивности равенства, введение и удаление штриха
Тема 1.3	Выводы основных свойств арифметических операций, представленных в виде формул формальной арифметики
Тема 1.4	Рассмотрение возможностей введения новых функций и отношений
Раздел 2	Непротиворечивость и неполнота арифметики
Тема 2.1	Нумерация объектов формальной арифметики
Тема 2.2	Соотношения между номерами объектов арифметики
Тема 2.3	Теорема Геделя о неполноте арифметики. Непротиворечивость арифметики

2.4. Модульная структура дисциплины с распределением весов по формам контролей

Формы контролей	Веса форм текущих контролей в результирующих оценках текущих контролей			Веса форм промежуточных контролей в оценках промежуточных контролей			Веса оценок промежуточных контролей и результирующих оценок текущих контролей в итоговых оценках промежуточных контролей			Веса итоговых оценок промежуточных контролей в результирующей оценке промежуточных контролей	Веса результирующей оценки промежуточных контролей и оценки итогового контроля в результирующей оценке итогового контроля
	M1 ¹	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3		
Вид учебной работы/контроля	M1 ¹	M2	M3	M1	M2	M3	M1	M2	M3		
Контрольная работа						1					
Тест											
Курсовая работа											
Лабораторные работы											
Письменные домашние задания			1								
Реферат											
Эссе											
<i>Другие формы (Указать)</i>											
<i>Другие формы (Указать)</i>											
Веса результирующих оценок текущих контролей в итоговых оценках промежуточных контролей									0.4		
Веса оценок промежуточных контролей в итоговых оценках промежуточных контролей									0.6		
Вес итоговой оценки 1-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей											
Вес итоговой оценки 2-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей											
Вес итоговой оценки 3-го промежуточного контроля в результирующей оценке промежуточных контролей										1	
Вес результирующей оценки промежуточных контролей в результирующей оценке итогового контроля											0.4
Экзамен/зачет (оценка итогового контроля)											0.6 (Экзамен/Зачет)
	$\Sigma = 1$	$\Sigma =$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$	$\Sigma = 1$

¹ Учебный Модуль

		1								
--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--

3. Теоретический блок (указываются материалы, необходимые для освоения учебной программы дисциплины)

3.1. Материалы по теоретической части курса

3.1.1. Учебник(и);

1. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. «Наука», М.1986, -368 с.
2. Трахтенброт Б. А. Сложность алгоритмов и вычислений. Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 1967, -260 с.
3. Kleene S. C. Introduction to metamathematics.-Princeton (N.J.), 1952, -550 p. [Русский перевод: Клини С. К. «Введение в метаматематику», ИЛ, М. 1957, -528 с.]
4. Марков А. А. Нагорный Н. М. Теория алгоритмов. Математическая логика и основания математики. «Наука», М. 1984, -432 с.
5. Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic, 4-th edition, LondonChapman&Hall, 1997. [Русский перевод: Мендельсон Э. Введение в математическую логику. «Наука», М. 1971, -320 с.]
6. Rogers H., Jr. Theory of Recursive Functions and Effective computability. Mc-Graw-Hill Book Company, New York-St-Louis- San Francisco- Toronto-London-Sedney, 1967. [Русский перевод: Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, «Мир» М. 1972, -624 с.]
7. Hilbert D. Mathematische Probleme.- Nach r. K. Ges. Wiss . Göttingen, math.-phys. K1. 1900, p. 253-297. [Русский перевод: Проблемы Гильберта. Наука, М. 1969.]

3.1.2. Учебное(ые) пособие(я):

1. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов, М., Физматгиз, 2001
2. Даштоян Л.Л., Чубарян А.А., Задачник-практикум по теории алгоритмов (методическое пособие), РАУ, Институт математики и высоких технологий, Ереван-2014

3.1.3. Курс лекций: имеется полный курс лекций:

3.1.4. Краткие конспекты лекций;

3.1.5. Электронные конспекты лекций имеются.

4. Фонды оценочных средств (указываются материалы, необходимые для проверки уровня знаний в соответствии с содержанием учебной программы дисциплины).

4.1. Материалы по практической части курса

4.1.1. Задачники (практикумы)

1. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов, М., Физматгиз, 2001
2. Даштоян Л.Л., Чубарян А.А., Задачник-практикум по теории алгоритмов (методическое пособие), РАУ, Институт математики и высоких технологий, Ереван-2014

4.2. Образцы вариантов контрольных работ, тестов и/или других форм текущих и промежуточных контролей

4.3. Перечень экзаменационных вопросов (красным указаны задачи по данному вопросу):

Теория алгоритмов

1. Определение частично (обще, примитивно) рекурсивных функций, примеры.
2. Дополнительные операции, не нарушающие примитивную (общую) рекурсивность: ограниченные (строго ограниченные) сумма, произведение, минимизация. Общая (возвратная) рекурсия.
Показать, что результат применения операций неограниченной суммы (произведения) к примитивно рекурсивным функциям может быть:
-не рекурсивной ф-ией
-рекурсивной ф-ией.
3. Предикаты, рекурсивные предикаты, результаты применения конечного числа логических операций к ним, примеры.
Показать, что результат применения к рекурсивным предикатам бесконечного числа логических операций $\&$ и \vee может быть
-рекурсивным предикатом
-не рекурсивным предикатом.
4. Результаты применения ограниченных и строго ограниченных кванторов существования и всеобщности.
Показать, что результат применения к рекурсивным предикатам неограниченных кванторов может быть
-рекурсивным предикатом
-не рекурсивным предикатом.

5. Лемма о разветвлении.

Обосновать недопустимость применения леммы о разветвлении к не всюду определенным ϕ -иям.

5. Нумерация Кантора n -ок натуральных чисел и восстановление членов по номеру.

6. Нумерация Гёделя n -ок натуральных чисел и восстановление членов по номеру.

7. Рекурсивность ϕ -ий, связанных с Гёделевской нумерацией.

8. Нумерация Клини n -ок натуральных чисел и восстановление членов по номеру.

9. Нумерация машин Тьюринга и их восстановление по номеру.

10. Арифметизация процесса работы машины Тьюринга: определение общего состояния, его нумерация и его преобразование.

11. Определение универсальной ϕ -ии, теорема о существовании универсальной ϕ -ии и следствия.

12. Теорема Клини о нормальной форме представления ч.р.ф..

13. Невозможность существования универсальной п.р.ф. (о.р.ф.) для множества всех п.р.ф. (о.р.ф.).

14. Универсальные ϕ -ии U и их свойства.

15. Универсальные ϕ -ии Клини и их свойства.

16. S-n-m теорема.

17. Теорема о неподвижной точке.

18. Распознаваемые (рекурсивные) множества и операции над ними.

Привести пример бесконечной последовательности таких распознаваемых множеств, что

- Их объединение распознаваемо
- Их объединение не распознаваемо
- Их пересечение распознаваемо
- Их пересечение не распознаваемо.

19. Теорема Райса (Маркова).

20. Полуразпознаваемые (рекурсивно-перечислимые) множества (первое и второе определения) и операции над ними.

Привести пример бесконечной последовательности таких полуразпознаваемых множеств, что

- Их объединение полуразпознаваемо
- Их объединение не полуразпознаваемо
- Их пересечение полуразпознаваемо
- Их пересечение не полуразпознаваемо.

21. Свойства множества значений п.р.ф-ий.

Привести примеры таких п.р.ф-ий, множество значений которых

- Распознаваемо
- Не распознаваемо, но полуразпознаваемо.

22. Третье и четвёртое определения полуразпознаваемых множеств.

23. Теорема Поста.

24. Проблемы применимости и самоприменимости, множества E^+ и E^- .

- Доказать некорректность множества E^+ : привести пример такой ч.р.ф., часть клиниевских номеров которых из E^+ , а часть из E^- .
- Доказать нераспознаваемость множества $E = \{(n,m) \mid \neg K_2(n,m)\}$.

25. Пятое определение полураспознаваемых множеств.
26. Шестое определение полураспознаваемых множеств.
27. Операции определенности и поиска нулей.
28. Седьмое определение полураспознаваемых множеств.

Доказать, что все определения полураспознаваемых множеств попарно равнозначны.

Математическая логика

1. Определение формальной теории (язык, аксиомы, правила выводов), свойства (непротиворечивость, полнота, разрешимость).
2. Определение исчисления высказываний, свойства.
3. Теорема дедукции в исчислении высказываний.
4. Лемма Кальмара.
5. Теорема о полноте исчисления высказываний.
6. Теорема о непротиворечивости исчисления высказываний.
7. Независимость аксиом исчисления высказываний.
8. Определения исчисления предикатов, свойства.
9. Интерпретации, выполнимые, противоречивые, тавтологичные и логически общезначимые формулы.
10. Теорема дедукции в исчислении предикатов.
11. Теорема о непротиворечивости исчисления предикатов.
12. Определения формальной арифметики, свойства.
13. Введение новых отношений в S .
14. Метатеорема о равенстве, сумме и произведении в S .
15. Выразимость предикатов и представление функций в S , примеры.
16. Представимость базисных функций в S .
17. Функция Гёделя и её свойство.
18. Представимость в S результата операции введения фиктивных переменных.
19. Представимость в S результата операции подстановки.
20. Представимость в S результата операции примитивной рекурсии.
21. Представимость в S результата операции минимизации.
22. Выразимость в S рекурсивных предикатов.
23. Нумерации объектов формальных теорий.
24. Первая теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики.
25. Вторая теорема Гёделя о невыводимости непротиворечивости арифметики в ней.

4.4. Образцы экзаменационных билетов- один теоретический вопрос и две задачи.

5. Методический блок

5.1. Методика преподавания

В основу методики преподавания и обучения положен тезис о том, что формирование профессиональных компетенций осуществляется в полном соответствии с диалектическим законом перехода количественных изменений в качественные. Для создания наилучших условий для действия этого закона, а также мотивации студентов применяются пять принципов: солидарности, объективности, основательности, актуальности и рационального использования времени. Принципы, с изложением их содержания, доводятся до студентов на первой лекции в ходе организационно-методических указаний.

Доступ к электронному курсу лекций избавляет студентов от необходимости тотальной записи излагаемого лекционного материала, что, в свою очередь, создаёт условия для продуктивной мыслительной работы. Текущий контроль осуществляется в ходе практических занятий: по итогам каждого занятия студенты оцениваются по трём составляющим: присутствие, выполнение домашнего задания, активность и проявленные знания в ходе самого занятия.

Итоговый контроль осуществляется в виде устного опроса на основе письменно изложенных студентом ответов на вопросы контрольного билета. Порядок оценивания разъясняется студентам в начале обучения и доводится до них в письменном виде в электронном формате.