

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՏՆՏԵՍԱԳԻՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՏՆՏԵՍԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԱՄԲԻՈՆ

*Տնտեսամաթեմատիկական
մեթոդներ և մոդելներ*
(ուսումնական ձեռնարկ)

Տնտեսագիտության դոկտոր, պրոֆեսոր
ԱՇՈՏ ԹԱՎԱԴՅԱՆԻ
ընդհանուր խմբագրությամբ

Երևան
«Տնտեսագետ»
2021

ՀՏԴ 330.4:519.86(07)
ԳՄԴ 65.050+22.185g7
S 776

*Ուսումնական ձեռնարկը հրատարակության է
երաշխավորել ՀԴՏՀ գիտական խորհուրդը*

Գրախոսողներ՝ Առաքելյան Ա.Յ.
տեխ.գ.դ., պրոֆեսոր

Բայադյան Ա.Յ.
տ.գ.դ., պրոֆեսոր

Նալչաջյան Թ.Ա.
տեխ.գ.դ., պրոֆեսոր

Մնացականյան Ռ.ժ.
տ.գ.թ.

*Ձեռնարկի շարադրանքի ընդհանուր գիտական դեկավարումն ու
խմբագրումն իրականացրել է տ.գ.դ., պրոֆեսոր Աշոտ Թավադյանը:*

*Աղյուսակների ու գծանկարների մշակումը՝ տ.գ.թ., դոցենտ Աղասի
Թավադյանի:*

Տնտեսամաթեմատիկական մեթոդներ և մոդելներ/ ՀԴՏՀ;

S 776 Տնտեսամաթեմատիկական մեթոդների ամբիոն; Ընդ. խմբ.՝

տ.գ.դ., պրոֆեսոր Ա. Թավադյան.- Եր.: Տնտեսագետ, 2021.- 324 էջ:

Ուսումնական ձեռնարկում համակարգված ձևով ներկայացվում են տնտեսագիտության մեջ կիրառություն ունեցող մեթոդները և մոդելները: Տնտեսամաթեմատիկական մտածելակերպը հնարավորություն է տալիս հստակորեն ձևակերպելու որոշակի նպատակ և դրա օպտիմալացման ուղիները, գնահատելու պատճառահետևանքային կապերը, ձևավորելու տնտեսական գործոցների փոխկապվածությունները, բացահայտելու տնտեսության «նեղ տեղերը», վերլուծելու սահմանափակումները, կատարելու կանխատեսումներ և գնահատելու դրանց հավանականությունները:

Գիրքը նախատեսվում է բարձրագույն ուսումնական հաստատությունների ուսանողների, մագիստրոսների, ասպիրանտների համար, ինչպես նաև կարող է օգտակար լինել դասախոսներին, պետական և այլ ոլորտների մասնագետներին, ովքեր հետաքրքրվում են տնտեսամաթեմատիկական մեթոդների և մոդելների հետազոտությամբ և կիրառությամբ:

ՀՏԴ 330.4:519.86(07)
ԳՄԴ 65.050+22.185g7

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ներածություն	7
--------------------	---

ԳԼՈՒԽ 1. ԳԾԱՅԻՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՍՈՂԵԼՆԵՐ

1.1. Նախագիտելիք	13
1.1.1. Որոշ տեղեկություններ բազմությունների տեսության մասին ..	13
1.1.2. Բազմությունների տեսության ստեղծման պատմությունից	21
1.1.3. Գործողություններ բազմությունների հետ	25
1.1.4. Ուռուցիկ բազմությունները և դրանց հատկությունները	29
1.1.5. Ուռուցիկ ու գոգավոր ֆունկցիաներ. դրանց հատկությունները	33
1.2. Գծային ծրագրավորման խնդիրներ	38
1.2.1. Տեղեկություններ գծային ծրագրավորման մասին	38
1.2.2. Գծային ծրագրավորման խնդրի տեսքերը	40
1.2.3. ԳԾԽ հանգեցումը կանոնական տեսքի	43
1.2.4. ԳԾԽ-ի հանգեցվող խնդիրների օրինակներ	44
1.2.5. ԳԾԽ լավագույն լուծման գոյության և հիմնական թեորեմները	56
1.2.6. ԳԾԽ գրաֆիկական լուծումը	58
1.2.7. ԳԾԽ լուծման սիմպլեքս ալգորիթը	65
1.2.8. ԳԾԽ լուծման սիմպլեքս ալգորիթի ծրագիրը	71

ԳԼՈՒԽ 2. ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԵՐԿԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

2.1. Գծային ծրագրավորման երկակի խնդիրների զույգ	74
2.2. ԳԾ երկակի խնդիրների տնտեսագիտական մեկնաբանությունը ռեսուրսների օպտիմալ օգտագործման խնդրի օրինակով	85
2.3. Օբյեկտիվորեն պայմանավորված գնահատականները ԳԾԽ-ում	89
2.4. ԳԾ խնդիրների վերլուծությունը ՕՊ գնահատականներով	91

ԳԼՈՒԽ 3. ՏՐԱՆՍՊՈՐՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

3.1. Տրանսպորտային խնդրի դրվածքը	104
3.2. T խնդրի երկակին: T խնդրի լուծման օպտիմալության հայտանիշը	117
3.3. Տրանսպորտային երկակի խնդրի տնտեսագիտական մեկնաբանությունը	119
3.4. Տրանսպորտային խնդրի մոդելն ավելցուկային պաշարների և չբավարարվող պահանջարկի դեպքում	122
3.4.1. Փակ և բաց տրանսպորտային խնդիրներ	122
3.4.2. Բաց տրանսպորտային խնդրի մոդելն ավելցուկային պաշարների դեպքում	122

3.4.3. Բաց տրանսպորտային խնդրի մոդելը չբավարարվող պահանջարկի դեպքում	124
3.5. Տրանսպորտային խնդրի լուծումը	125

ԳԼՈՒԽ 4. ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

4.1. Ոչ գծային ծրագրավորման (ՈԳԾ) կամ օպտիմալացման հիմնական խնդիր, ՈԳԾ խնդիրների հիմնական դասերը, լուծման առանձնահատկությունները	136
4.2. ՈԳԾ խնդրի լուծման գրաֆիկական եղանակը	141
4.3. Մաթեմատիկական ծրագրավորման դասական խնդրի լուծման Լագրանժի բազմապատկիչների եղանակը	145
4.4. Կուն-Թակերի օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները ..	151
4.5. Կուն-Թակերի թեորեմը	153

ԳԼՈՒԽ 5. ԱՄԲՈՂՋԱԹԻՎ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

5.1. Ամբողջաթիվ ծրագրավորման խնդրի դրվածքը	156
5.2. Հոմորիի պլգորիթմը	159

ԳԼՈՒԽ 6. ԴԻՆԱՄԻՎ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ.....163

6.1. Ուսապարկի խնդիրը	166
6.2. Բանվորական ուժի օպտիմալ կառավարման խնդիրը	167
6.3. Կարճագույն ուղու խնդիրը	168
6.4. Ձեռնարկության ներդրումների բաշխման խնդիրը	172

ԳԼՈՒԽ 7. ԽԱՂԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

7.1. Խաղերի տեսության հիմնական հասկացությունները	180
7.1.1. Խաղերի դասակարգումը	180
7.1.2. Խաղերի ձևայնացումը	182
7.2. Հակամարտ խաղեր	185
7.3. Ոչ զրոյական գումարով խաղեր և կոոպերատիվ խաղեր	191
7.4. Խաղերի տեսության կիրառումը միկրոտնտեսական խնդիրներում	195
7.5. Դիրքային խաղեր	199

ԳԼՈՒԽ 8. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕԳՏԱԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

8.1. Ընդհանուր օգտակարության ֆունկցիայի աքսիոմները և սահմանումը	202
8.2. Անտարբերության կորեր, բարիքների սահմանային օգտակարություն	204
8.3. Բարիքների փոխարինման սահմանային նորմա (MRS, marginal rate of substitution)	206
8.4. Սպառողի ռացիոնալ վարքագիծը	208

ԳԼՈՒԽ 9. ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ.....213

9.1. Տարրական ֆունկցիաների առաձգականությունը214

9.2. Առաձգականության տեսակները և կիրառությունները
տնտեսագիտական վերլուծությունում216

**ԳԼՈՒԽ 10. ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ ԵՎ ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ
ԳՈՐԾՈՆՆԵՐ219**

10.1. Արտադրական ֆունկցիաների հատկությունները.....221

10.2. Արտադրության արդյունավետություն: Միջին և
սահմանային արդյունք222

10.3. Արտադրության էլաստիկություն՝ ըստ i-րդ գործոնի.....225

10.4. Իզոքվանտ և իզոկլին: Արտադրական գործոնների
փոխարինման սահմանային նորմա227

10.5. Արտադրության մասշտաբի ազդեցությունը:
Արտադրական ֆունկցիայի համասեռություն231

10.6. Արտադրական գործոնների փոխարինման
էլաստիկություն233

10.7. Գործոնների փոխադարձ փոխարինման հաստատուն
էլաստիկությամբ արտադրական ֆունկցիա (CES)237

10.8. Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիա239

10.9. Լեոնտևի արտադրական ֆունկցիա242

10.10. Գծային արտադրական ֆունկցիա242

ԳԼՈՒԽ 11. ՀԱՇՎԵԿՇՈՒՄՅՈՒՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

11.1. Հաշվեկշռային մեթոդը.....244

11.2. Միջնյուղային հաշվեկշռի ստատիկ մոդելները245

11.3. Միջնյուղային հաշվեկշռի կախվածությունները.....249

11.4. Ուղղակի ծախսերի գործակիցներ.....250

11.5. Միջնյուղային հաշվեկշռի՝ Լեոնտևի (հիմնական)
հավասարումը252

11.6. Լրիվ ծախսերի և լրիվ նյութական ծախսերի
գործակիցները253

11.7. Ուղղակի և լրիվ աշխատատարության ու կապիտալ-
տարության գործակիցները միջնյուղային հաշվեկշռում ...258

11.8. Միջնյուղային հաշվեկշռի դինամիկ մոդելները260

11.9. Միջնյուղային հաշվեկշռի մոդելը որպես օպտիմալացման
մոդելի պարզ տարբերակ266

11.10. Սահմանափակ ռեսուրսներով միջնյուղային հաշվեկշռի
օպտիմալացման մոդելը268

11.11. Ձեռնարկության կառավարման մատրիցային մոդելը270

ԳԼՈՒԽ 12. ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

12.1. Արտադրական տնտեսամաթեմատիկական մոդելների դասակարգումը	274
12.2. Բազմարդյունք, անընդհատ փոփոխականներով արտադրական ստատիկ մոդելը	275
12.3. Արտադրական խնդրի դինամիկ մոդելներ	277
12.4. Միջանցիկ մոտեցումը դինամիկ արտադրական մոդելներում	278
12.5. Արտադրատրանսպորտային խնդիր	279

ԳԼՈՒԽ 13. ՖԻՐՄԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

13.1. Ֆիրմայի տեսության նորդասական մոդելը	282
13.2. Ոչ կատարյալ մրցակցություն, մենաշնորհ (մոնոպոլիա) և մոնոպսոնիա	288
13.3. Օլիգոպոլիա և օլիգոպսոնիա. մրցակցություն փոքրաթիվ մասնակիցների միջև	289
13.4. Կուռնոյի երկշնորհային (դուոպոլ) մոդելը	291
13.5. Շտակելբերգի մոդելը	293
13.6. Փոխադարձ խնդիրներ	297

ԳԼՈՒԽ 14. ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԵՎ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ԻՄԻՏԱՑԻՈՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՈՒՄ

14.1. Իմիտացիոն մոդելավորման մաթեմատիկական հիմքերը ..	300
14.1.1. Համակարգերի ընդհանուր տեսություն	301
14.1.2. Ջանգվածային սպասարկման տեսություն	301
14.1.3. Սարկոլյան գործընթաց	301
14.2. Պատմական ակնարկ	303
14.3. MATLAB / SIMULINK համակարգի հակիրճ նկարագիրը	306
14.4. Իմիտացիոն մոդելավորման տեսակները	311
14.5. Գերարտադրության տնտեսական ճգնաժամի պարզ իմիտացիոն մոդելը Simulink-ում	312
14.6. Տնտեսական պարբերաշրջանների մաթեմատիկական մոդելը	314
14.7. Ընդհանուր մակրոտնտեսական հավասարակշռության հաշվարկային իմիտացիոն մոդելներ	317
14.8. FRB/US և ԱՄՆ-ի դաշնային պահուստային համակարգի Sigma մոդելները	318
14.9. Ընդհանուր տնտեսական հավասարակշռության հաշվարկային մոդելների գործիքակազմի առավելությունները	320

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

Մաթեմատիկան տնտեսագիտական հետազոտություններում համակարգված ձևով կիրառվում է դեռևս 19-րդ դարի սկզբից: 1838 թ. ֆրանսիացի գիտնական Անտուան Օգյուստեն Կուլմոնը հրատարակեց տնտեսամաթեմատիկական բովանդակությամբ՝ «Հարըստության տեսության մաթեմատիկական սկզբունքների հետազոտություններ» մենագրությունը, որտեղ բացահայտեց գների կախվածությունը շուկայում առկա մրցակցության աստիճանից: Հերթականությամբ ուսումնասիրելով լրիվ մենաշնորհայինից մինչև լիակատար մրցակցության մոդելները՝ Կուլմոնը եզրակացրեց, որ վերջին դեպքում ձևավորվում են ամենացածր գները, որոնք որոշակի սահմանում ձգտում են հասնելու արտադրության լրիվ ծախսերին:

19-րդ դարի կեսին գերմանացի տնտեսագետ Հերման Հենրիխ Գոսենը, ստեղծելով սպառման մաթեմատիկական տեսությունը, ձևակերպեց 2 դրույթ, այսպես կոչված՝ Գոսենի օրենքները.

1. Լրացուցիչ բարիքի միավորի օգտակարությունը նվազում է սպառման ծավալների աճին զուգընթաց և դառնում է զրո հազեցման կետում:
2. Սահմանափակ ռեսուրսի օգտագործումը արդյունավետ կլինի այն դեպքում, երբ լրացուցիչ բարիքների սահմանային օգտակարությունները մույնը լինեն բոլոր բարիքների համար:

Այս մոտեցումը զարգացրին անգլիացի տնտեսագետ Ուիլյամ Ստենլի Ջևոնսը, ավստրիական դպրոցի ներկայացուցիչ Կարլ Մենգերը և լոզանյան մաթեմատիկական դպրոցի ներկայացուցիչ Լեոն Վալրասը, ով առաջինը փորձեց կառուցել ապրանքային փոխանակման ընդհանուր մոդել, ինչը հետագայում հիմք ծառայեց տնտեսական հավասարակշռության մոդելների կառուցման համար: Վալրասի գործը շարունակեց Վիլֆրեդո Պարետոն: Նա ձևակերպեց ընդհանուր հավասարակշռության մոդելի դինամիկ տարբերակը և սահմանեց տնտեսագիտական վերլուծություններում լայնորեն կիրառվող օպտիմալության սկզբունքը՝ ըստ **Պարետոյի**: Այն ձևակերպվում է այսպես. հասարակության տարբեր անդամների միջև բարիքների բաշխումն օպտիմալ է, եթե որևէ մեկի բարեկեցության հետագա աճը հանգեցնում է հասարակության զոհե մեկ անդամի բարեկեցության նվազմանը:

20-րդ դարի առաջին կեսին ակտիվորեն զարկ տրվեց պահանջարկի ու սպառման ծախսերի մոդելավորմանը և գնահատմանը (Ռուֆ Էլիս Ալեն, Ալֆրեդ Մարշալ), արտադրական ֆունկցիաների վերլուծությանը (Չարլզ Կոբ, Պոլ Դուգլաս), գործարարական պարբերաշրջանների տնտեսամաթեմատիկական մոդելավորմանը (Նի-

կոլայ Կոնդրատև, Եվգենի Սլուցկի): Ժամանակակից մակրոմոդելավորման հետազոտողներից են հոլանդացի Յան Տինբերգենը և նորվեգացի Ռագնար Ֆրիշը, որոնք 1969 թ. դարձան տնտեսագիտությունից առաջին Նոբելյան մրցանակակիրները:

Մաթեմատիկորեն ներկայացված տնտեսագիտական բազմաթիվ հիմնահարցեր ունեն լավագույն լուծումներ գտնելու նպատակ՝ որոշակի սահմանափակումների, փոխկապվածությունների և «նեղ տեղերի» առկայությամբ: Հաճախ այդպիսի խնդիրները գծային տեսքով են, որոնց լուծման մեթոդն իրարից անկախ առաջարկեցին տնտեսագիտության Նոբելյան մրցանակակիր Լեոնիդ Կանտորովիչը և Ջորջ Բեռնարդ Դանցիգը: Այդպիսով հիմք դրվեց տնտեսագիտության մեջ լավագույն որոշումների կայացման մեթոդների ձևավորման գործընթացին:

Օպտիմալացման մոդելները ներառում են հավասարումներ և անհավասարումներ, ինչպես նաև օպտիմալության հայտանիշ (օրինակ՝ նվազագույն (մինիմում) ծախսեր՝ տրված ծավալների արտադրության պայմանով կամ առավելագույն (մաքսիմում) արտադրանք (եկամուտ, շահույթ)՝ տրված հումքային սահմանափակումների դեպքում): Այդ տիպի խնդիրների լուծման համար ստեղծվել և ձևավորվել են բազմաթիվ տնտեսամաթեմատիկական մեթոդներ՝ միավորված որպես օպտիմալ որոշումների կայացման տեսություն: Օպտիմալ որոշման ընդունման մեթոդները ներառում են գծային, դինամիկ, ոչ գծային, դիսկրետ, բլոկային, պարամետրական, սեպարաբել և ստոխաստիկ, ճյուղերի և սահմանների, ցանցային մեթոդներ, խաղերի տեսություն և այլն:

Տնտեսագիտության մեջ բազմաթիվ կիրառական խնդիրներ և մի շարք կարևորագույն տեսական հարցեր ուղղակիորեն փոխկապակցված են լավագույն՝ օպտիմալ տարբերակի որոնման հետ: Այդպիսին են, օրինակ, ձեռնարկության օպտիմալ արտադրական ծրագրի ձևավորումը, տրանսպորտային խնդիրները՝ կապված համապատասխան հոսքերի արդյունավետ բաշխման հետ, մի շարք կարևորագույն տնտեսագիտական խնդիրներ, որտեղ նպատակահարմար է ձևավորել լավագույն տարբերակը:

Գիտնականների մեծամասնությունը, ով արժանացել է Նոբելյան մրցանակի տնտեսագիտությունից, ակտիվորեն կիրառել է տնտեսամաթեմատիկական մեթոդներ: Զարգացած երկրներում տնտեսագիտական գրականության մեջ լայնորեն կատարվում է մեծածավալ տնտեսամաթեմատիկական վերլուծություն:

Տնտեսամաթեմատիկական մեթոդները կիրառվում են տնտեսագիտության բոլոր ոլորտներում, մասնավորապես՝ տնտեսական աճի վերլուծության (մակրոտնտեսական դինամիկայի մոդելներ),

արտադրական ֆունկցիաների կառուցման ժամանակ, ստատիկ և դինամիկ միջճյուղային, ֆինանսական հաշվեկշիռներում, ազգային հաշիվներում, պահանջարկի և առաջարկի վերլուծության, տարածաշրջանային (ռեգիոնալ) և համընդհանուր (գլոբալ) մոդելավորման, ռիսկի գնահատման դեպքերում: Ակտիվորեն օգտագործվում են շուկայի և մրցունակության պարբերաշրջանների, մենաշնորհի և օլիգոպոլիայի գնահատման, ինդիկատիվ ծրագրավորման, ձեռնարկատիրության մոդելները:

Տնտեսամաթեմատիկական մեթոդներն ունեն գերիշխող դեր տնտեսական պրակտիկայում, բիզնեսում, որոշումներ կայացնելիս: Դրանք լայնորեն կիրառվում են արդյունավետ ձեռնարկություններում, բանկերում և հիմնադրամներում:

Տնտեսամաթեմատիկական մտածելակերպը հնարավորություն է տալիս հստակորեն ձևակերպելու նպատակը, օբյեկտի գործունեության օպտիմալացման ուղիները, գնահատելու պատճառահետևանքային կապերը, ներկայացնելու տնտեսական ցուցանիշների փոխկապակցվածությունները, բացահայտելու տնտեսության «նեղ տեղերը», սահմանափակումները, ձևակերպելու և վերլուծելու ռիսկերը, դրանց անորոշության աստիճանը, կատարելու կանխատեսումներ ու գնահատելու դրանց հավաստիությունը:

«**Մոդել**» եզրույթը ծագել է ֆրանսերեն «modele» բառից, ինչն էլ իր հերթին՝ լատիներեն «modulus» բառից, որը նշանակում է չափ, մեծանակ, օրինակ:

Կան «**մոդել**» եզրույթի մի շարք սահմանումներ:

Մոդելն արհեստականորեն կառուցվող մի համակարգ է, որն արտացոլում է ուսումնասիրվող օբյեկտի կարևորագույն հատկությունները, և դրա վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս ստանալու մոր տեղեկատվական գիտելիք օբյեկտի մասին:

Մոդելն այնպիսի համակարգ է, որի վերլուծությունը միջոց է հանդիսանում մեկ այլ համակարգի մասին տեղեկատվություն ստանալու համար:

Մոդելն իրական օբյեկտի և/կամ դրանում ընթացող գործընթացների ու երևույթների պարզեցված ներկայացումն է:

Մոդելի հիմնական **գործառույթներն** են.

- կիրառական՝ որպես փորձարկման յուրահատուկ մեթոդ,
- տեսական՝ որպես իրական օբյեկտի այնպիսի պատկեր, որում կարող են համատեղվել վերացարկման և որոշակիության տարրերը:

Մոդելներին ներկայացվող հիմնական **պահանջներն** են.

- համապատասխանություն,
- ճշգրտություն,

- համապիտանիություն,
 - նպատակահարմար խնայողականություն:
- Մոդելները բաժանվում են երկու մեծ **դասերի**.
- առարկայական (իրական, բնական),
 - մտային (վերացական (աբստրակտ)):

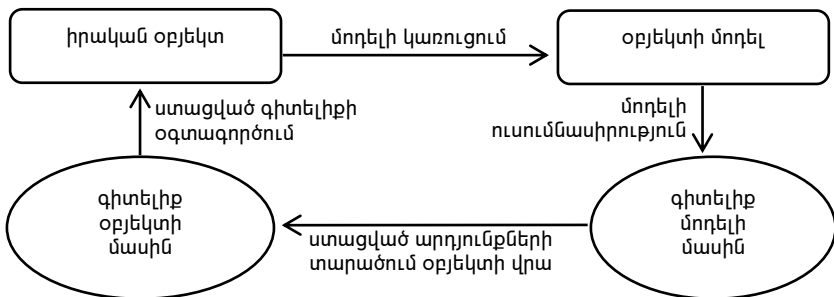
Առարկայական մոդելներն արտացոլվում են բնական կամ արհեստական ծագում ունեցող առարկայական օբյեկտների միջոցով. օրինակ՝ աերոդինամիկ խողովակ, մանեկեն, ավտոմթարի ընդօրինակում (իմիտացիա) և այլն:

Մտային մոդելները մարդկային մտածողության արդյունք են: Գիտական հետազոտություններում օգտագործվող մտային մոդելների մեծ մասը նշանային է: Դրանցից առավել կարևոր նշանակություն ունեն **տրամաբանամաթեմատիկական** (կամ պարզապես՝ մաթեմատիկական) մոդելները:

Մոդելների հիմնական տեսակներն են.

1. Էվրիստիկական (հորինվածքային)
2. Բնական.
 - 2.1. ֆիզիկական
 - 2.1.1. ծավալային
 - 2.1.2. հարթ
 - 2.2. տեխնիկական
 - 2.3. սոցիալական
 - 2.4. տնտեսական
3. Մաթեմատիկական.
 - 3.1. անալիտիկ (վերլուծական)
 - 3.2. թվային
 - 3.3. ձևական-տրամաբանական տեղեկատվական:

Մոդելի կառուցումը, ուսումնասիրումը և կիրառումը կոչվում են **մոդելավորում**: Մոդելավորման գործընթացը կարող է ներկայացվել հետևյալ գծապատկերով.



Մոդելի կառուցման փուլում ձևակերպվում է նպատակային գործառույթը, բացահայտվում են օբյեկտի կարևոր ու երկրորդական հատկությունները, առկա սահմանափակումները և կատարվում է համակարգի պատճառահետևանքային ու ֆունկցիոնալ կապերի վերլուծությունը:

Վերլուծության փուլում կատարվում են մոդելի ուսումնասիրություն, խնդրի լուծման մեթոդների գնահատում և կիրառում:

Հաջորդ փուլում, համակարգելով ուսումնասիրությունը, վերլուծված մոդելի միջոցով պատրաստվում է եզրակացություն օբյեկտի մասին:

Վերջին փուլում ամփոփվում ու կիրառվում են ստացված արդյունքները և ընդունվում է որոշում:

Մոդելավորումը պարբերաշրջանային (ցիկլային) գործընթաց է, ընդ որում, յուրաքանչյուր պարբերաշրջանում գիտելիքն օբյեկտի մասին ավելանում և ճշգրտվում է, իսկ սկզբնական մոդելը՝ ձևափոխվում (մոդիֆիկացվում) և կատարելագործվում: Առաջին պարբերաշրջանից հետո նկատված թերությունները, որոնք պայմանավորված են օբյեկտի ոչ լրիվ իմացությամբ և մոդելի կառուցման ժամանակ թույլ տրված բացթողումներով, հաջորդիվ վերացվում են:

Մաթեմատիկական մոդելների կառուցման և հետազոտման գործընթացը կոչվում է **մաթեմատիկական մոդելավորում:**

Մաթեմատիկական մոդելները մաթեմատիկական առնչությունների և արտահայտությունների (ֆունկցիա, հավասարում, անհավասարում և այլն) որոշակի համակարգ են, որի միջոցով արտացոլվում են հետազոտվող օբյեկտի էական հատկությունները: Եթե օբյեկտը **տնտեսական** է, ապա մոդելը կհանդիսանա **տնտեսամաթեմատիկական**, իսկ մոդելավորման գործընթացը՝ **տնտեսամաթեմատիկական մոդելավորման:**

Տնտեսամաթեմատիկական մեթոդներ կիրառելիս կարևորագույն խնդիր է նպատակի, սահմանափակումների, փոխկապվածությունների և, իհարկե, առաջադրանքի լուծման «գաղափարախոսության» և տնտեսագիտական մեկնաբանության հստակ ներկայացումը:

Տնտեսամաթեմատիկական մոդելավորման փուլերն են.

1. տնտեսագիտական հիմնախնդրի ուսումնասիրությունը և դրա որակական վերլուծությունը,
2. մոդելի կառուցումը կամ տնտեսական հիմնախնդրի ձևայնացումը,
3. մոդելի ընդհանուր հատկությունների գնահատումը, լուծման գոյության ապացույցը,

4. սկզբնական տեղեկատվության նախապատրաստման գործընթացը,
5. խնդրի լուծումը,
6. ստացված արդյունքների վերլուծությունը և որոշումների կայացումը:

Տնտեսամաթեմատիկական մոդելավորման սկզբնական և վերջնական փուլերում նպատակահարմար է կիրառել նաև ճանաչման այլ (ոչ մաթեմատիկական) մեթոդներ, որոնք նպաստում են ելակետային տվյալների ստույգ ընտրությանը և ստացված արդյունքների ճիշտ մեկնաբանմանը:

Օպտիմալացման խնդիրների մաթեմատիկական դրվածքն ընդհանուր դեպքում $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ նպատակային ֆունկցիայի առավելագույն կամ նվազագույն արժեքի որոշման մեջ է՝ $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}$ պայմանների կամ սահմանափակումների դեպքում:

f և g_i ֆունկցիաների հատկություններից կախված՝ առանձնացվում են գծային և ոչ գծային ծրագրավորման խնդիրներ: Եթե f և g_i ($i = \overline{1, m}$) ֆունկցիաները գծային են, ապա համապատասխան խնդիրը **գծային ծրագրավորման խնդիր է** (ԳԾԽ): Եթե հիշյալ ֆունկցիաներից գոնե մեկը գծային չէ, ապա համապատասխան խնդիրը **ոչ գծային ծրագրավորման խնդիր է** (ՈԳԾԽ):

Ուսումնական ձեռնարկի գլուխները շարադրել են՝

Թավադյան Ա. Ա.	տ. գ. դ., պրոֆեսոր (ներածություն, գլուխ 6, գլուխ 8, գլուխ 11)
Նալչաջյան Վ. Թ.	տ. գ. թ., դոցենտ (գլուխ 1, 12)
Մանուկյան Ե. Գ.	տ. գ. թ., դոցենտ (գլուխ 2, 3)
Հակոբյան Տ. Հ.	տ. գ. թ., դոցենտ (գլուխ 4)
Մկրտչյան Ա. Վ.	տ. գ. թ. (գլուխ 5)
Պետրոսյան Ա. Հ.	Ֆ. մ. գ. թ. (գլուխ 6)
Թևիկյան Ա. Ռ.	տ. գ. թ., դոցենտ (գլուխ 7, 14)
Բազինյան Ե. Ա.	տ. գ. թ., դոցենտ (գլուխ 8)
Կեսոյան Ն. Մ.	տ. գ. թ., դոցենտ (գլուխ 9)
Հարությունյան Կ. Շ.	տ. գ. թ., դոցենտ (գլուխ 10)
Հարությունյան Մ. Ն.	տ. գ. թ., պրոֆեսոր (գլուխ 11)
Հարությունյան Զ. Հ.	(գլուխ 11)
Թավադյան Ադ. Ա.	տ. գ. թ., դոցենտ (գլուխ 12, 14)
Խչեյան Մ. Հ.	(գլուխ 12)
Սարգսյան Ս. Դ.	տ. գ. թ., դոցենտ (գլուխ 13)

1.1. ՆԱԽԱԳԻՏԵԼԻՔ

1.1.1. Որոշ տեղեկություններ բազմությունների տեսության մասին

Բազմությունների տեսության մեջ «բազմություն» եզրույթը, ըստ էության, ճշգրտորեն սահմանել հնարավոր չէ, ինչպես նաև «պատկանելու» առնչությունը, տարրը չեն սահմանվում, բայց համարվում է, որ դրանք հստակ և բավականաչափ միարժեքորեն են ընկալվում: Նման ձևով երկրաչափության դասընթացներում չեն սահմանվում որոշ սկզբնական հասկացություններ՝ կետը, ուղիղը, հարթությունը, տարածությունը և այլն:

«Բազմությունը» մաթեմատիկայի առանցքային հասկացություններից մեկն է և, սովորաբար, ընդունվում է որպես սկզբնական, այսինքն՝ չի համոզեցվում այլ հասկացությունների, ուստի և չի ունենում սահմանում: Իհարկե, կարելի է տալ բազմության նկարագրությունը: Եթե, այնուամենայնիվ, փորձենք սահմանել բազմությունը, ապա, կարելի է այն նկարագրել, օրինակ, որպես որոշակի հատկանիշով խմբավորված տարրերի ամբողջություն կամ որոշակի հատկանիշով առանձնացված տարրերի համախմբություն: Գեորգ Կանտորն այն նկարագրում է այսպես. «Բազմություն ասելով հասկանում ենք, ըստ մեր հայեցողության կամ մտածողության, որոշակիորեն լավ տարբերվող m առարկաներ՝ միավորված որևէ M ամբողջության մեջ»: Մեկ այլ ձևակերպում պատկանում է Բերտրան Ռասելին. «Բազմությունը տարբեր տարրերի համախմբություն է՝ ընկալված որպես մեկ ամբողջություն»: Ինչպես տեսնում ենք, բոլոր դեպքերում էլ «բազմություն» եզրույթը պարզապես փոխարինվում է մեկ ուրիշով (ամբողջություն, համախմբություն), ինչը, չլուծելով սահմանման հարցը, արդեն պահանջում է սահմանել նաև փոխարինող եզրույթը:

Բազմությունը կարող է լինել փակ և բաց, կարգավորված և չկարգավորված, վերջավոր և անվերջ, սահմանափակ և անսահմանափակ և այլն: Ավելին, յուրաքանչյուր օբյեկտ կարելի է համարել բազմություն:

Ներկայացնենք բազմությունների տեսության հիմնական սահմանումները.

Սահմանում: Բազմությունը կոչվում է **սահմանափակ**, եթե այն հնարավոր է ներառել վերջավոր շառավղով գնդի մեջ (հարթության վրա՝ շրջանի մեջ): Հակառակ դեպքում բազմությունն **անսահմանափակ** է:

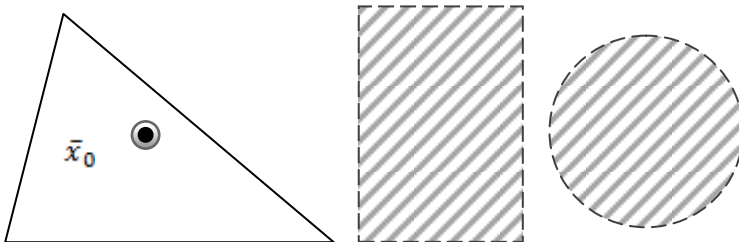
Սահմանափակ բազմությունների օրինակներ են հատվածը, եռանկյունը, զուգահեռագիծը, շրջանը, շրջանագիծը և այլն:

Անսահմանափակ բազմությունների օրինակներ են ճառագայթը, ուղիղը, կիսահարթությունը, անսահմանափակ շերտը և այլն:

Սահմանում: $\bar{X}_0$ կետի ε **շրջակայք** է կոչվում $\bar{X}_0$ կենտրոնով և $\varepsilon > 0$ շառավղով գունդը (հարթության վրա՝ շրջանը):

Սահմանում: $\bar{X}_0$ կետը բազմության համար կոչվում է **ներքին**, եթե գոյություն ունի $\bar{X}_0$ կետի ε շրջակայք, որն ամբողջությամբ պատկանում է բազմությանը (գծապատկեր 1.1.ա):

Սահմանում: Բազմությունը կոչվում է **բաց**, եթե դրա բոլոր կետերը ներքին են (գծապատկեր 1.1.բ): Տնտեսագիտական կիրառություններում բաց բազմություններն արտացոլվում են խիստ անհավասարումների միջոցով:



ա) $\bar{X}_0$ -ն ներքին կետ է

բ) բաց բազմություններ

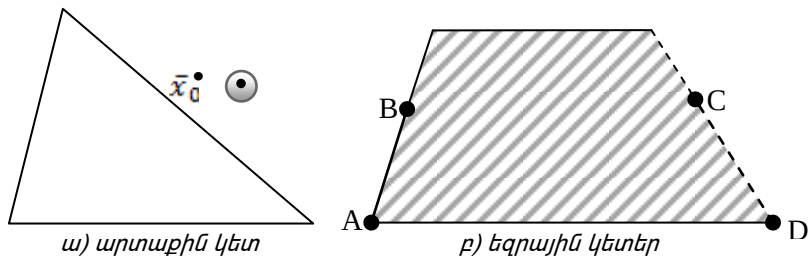
Գծապատկեր 1.1

Սահմանում: $\bar{X}_0$ կետը բազմության համար կոչվում է **արտաքին**, եթե գոյություն ունի $\bar{X}_0$ կետի շրջակայք, որը բազմությունից ոչ մի կետ չի պարունակում (գծապատկեր 1.2. ա):

Սահմանում: $\bar{X}_0$ կետը բազմության համար կոչվում է **եզրային**,

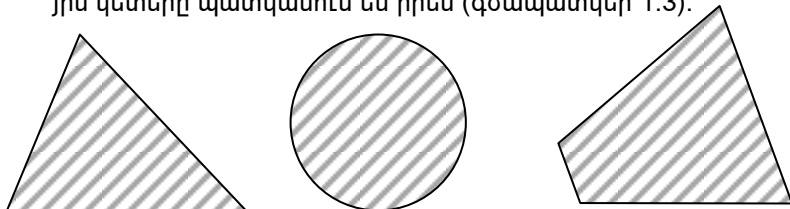
եթե $\bar{X}_0$ -ի ցանկացած շրջակայքը պարունակում է կետեր ինչ-պես բազմությունից, այնպես էլ այդ բազմությունից դուրս (գծապատկեր 1.2. ք):

Բազմության համար եզրային, ներքին և արտաքին կետերը կարող են պատկանել կամ չպատկանել այդ բազմությանը:



Գծապատկեր 1.2

Սահմանում: Բազմությունը կոչվում է **փակ**, եթե դրա բոլոր եզրային կետերը պատկանում են իրեն (գծապատկեր 1.3):



Գծապատկեր 1.3. Փակ բազմությունների օրինակներ

Տնտեսագիտական կիրառություններում փակ բազմությունները տրվում են ոչ խիստ անհավասարումների միջոցով: Բազմությունը կարող է լինել **ոչ բաց, ոչ էլ՝ փակ**:

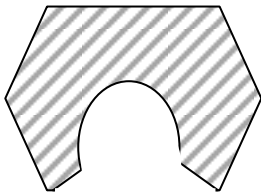
Որոշ բազմություններ նույնիսկ կարող են միաժամանակ հանդիսանալ **և՛ բաց, և՛ փակ**:

Սահմանում: Բոլոր եզրային կետերի բազմությունը կոչվում է **բազմության եզր**: Բազմության եզրը կամ դրա մի մասը կարող է նաև բազմությանը չպատկանել: Ոչ բոլոր բազմություններն ունեն եզրեր, օրինակ՝ հարթությունը: Ակնհայտ է, որ սահմանափակ բազմություններն ունեն եզրեր:

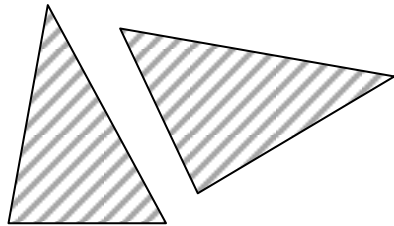
Սահմանում: $\bar{X}_0$ կետը բազմության համար կոչվում է **սահմանային**, եթե $\bar{X}_0$ -ի կամայական շրջակայքը պարունակում է կետեր այդ բազմությունից (բացի $\bar{X}_0$ -ից):

Բազմության համար $\bar{X}_0$ սահմանային կետին բնորոշ առանձնահատկությունն այն է, որ գոյություն ունի $\bar{X}_0$ կետին զուգամիտող և բազմությանը պատկանող տարբեր կետերի հաջորդականություն: Պարտադիր չէ, որ սահմանային կետը պատկանի բազմությանը:

Սահմանում: Բազմությունը կոչվում է **կապակցված**, եթե այն հնարավոր չէ տրոհել երկու ոչ դատարկ, չհատվող բաց ենթաբազմությունների (ըստ Անդրեյ Բիցաձեի, գծապատկեր 1.4):



ա) կապակցված բազմություն



բ) չկապակցված բազմություն

Գծապատկեր 1.4

Կապակցված բազմության յուրաքանչյուր երկու կետի միջև հնարավոր է կառուցել ուղի (կոր), որի բոլոր կետերը պատկանում են բազմությանը, իսկ չկապակցված բազմության մեջ կա չհամընկնող կետերի զոնե մեկ զույգ, որի համար այդպիսի ուղի կառուցել հնարավոր չէ:

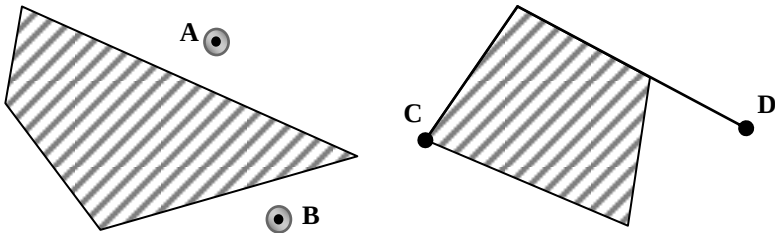
Այստեղ օգտագործվեցին «ուղի» և «կոր» եզրույթները, որոնք պետք էր սահմանել, չնայած դրանց ակնհայտ լինելուն: Դրանից խուսափելու համար կարելի է դիտարկել բազմության զույգ առ զույգ՝ տարբեր կետերից կազմված հաջորդականությունը:

Թեորեմ: Որպեսզի $\bar{X}_0$ կետը բազմության համար լինի սահմանային, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա բազմության՝ զույգ առ զույգ տարբեր կետերից կազմված հաջորդականություն, որը զուգամիտում է $\bar{X}_0$ -ին:

Սահմանում: $\bar{X}_0$ -ն կոչվում է բազմության **մեկուսացված կետ**,

եթե գոյություն ունի դրա այնպիսի շրջակայք, որից միայն $\bar{X}_0$ կետն է պատկանում այդ բազմությանը (գծապատկեր 1.5):

Սահմանում: Բազմությունը կոչվում է **կատարյալ**, եթե այն փակ է և չունի մեկուսացված կետեր, այսինքն՝ համընկնում է իր բոլոր սահմանային կետերի բազմության հետ:



ա) A-ն և B-ն մեկուսացված են

բ) C-ն և D-ն մեկուսացված չեն

Գծապատկեր 1.5

Սահմանում: Բազմությունը կոչվում է **դիսկրետ** (ընդհատ), եթե դրա յուրաքանչյուր կետ մեկուսացված է:

Սահմանում: Կետերից կազմված բազմությունը կոչվում է **կետային**:

Սահմանում: **Դատարկ** բազմությունը չունի ոչ մի տարր:

Սահմանում: **Ունիվերսալ** բազմությունը պարունակում է բոլոր հնարավոր օբյեկտները:

Սահմանում: **Կարգավորված** բազմությունում տրված է կարգավորման հարաբերությունը:

Բազմությունների կարգավորվածության աստիճանները կարող են տարբեր լինել: Օրինակ՝ **իրական թվերի բազմությունն** ավելի բարձր կարգավորվածության աստիճան ունի, քան **բարիքների հավաքածուներինը**, քանի որ կամայական a և b թվերի համար կարելի է որոշել, թե դրանցից՝ ա) ո՞րն է մեծ, բ) քանի՞ անգամ է մեծ, գ) որքանո՞վ է մեծ, իսկ բարիքների x_a և x_b հավաքածուների համար, ըստ **առաջին աքսիոմի**՝ ո՞րն է նախընտրելի, ինչն ա) կետի համանմանն է (անալոգը):

Սահմանում: Սուլտիբազմությունը կազմված է պատիկ տարրերից (օրինակ՝ {5,10,15,20}):

Սահմանում: Բազմությունը կոչվում է **վերջավոր**, եթե գոյություն ունի **z ամբողջ թիվ**, որը հավասար է բազմության տարրերի քանակին:

Հակառակ դեպքում բազմությունն **անվերջ է**: Անվերջ բազմությունների **իզոթությունները** կարող են տարբեր լինել, օրինակ՝ հաշվելի, կոնտինուում, հիպերկոնտինուում և այլն:

Սահմանում: A և B բազմություններն ունեն **նույն իզոթությունը**, եթե դրանց տարրերի միջև կարելի է հաստատել փոխմիարժեք համապատասխանություն:

Թվային բազմությունները միմյանց հետ համեմատելով՝ Կանտորը ցույց տվեց, որ, օրինակ, գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն բնական և ռացիոնալ թվերի բազմությունների միջև, չնայած բնական թվերի բազմությունը ռացիոնալի միայն մի մասն է: Այսպիսով՝ անվերջ բազմությունների տեսության մեջ ուժը կորցնում է «մասը քիչ է ամբողջից» պնդումը:

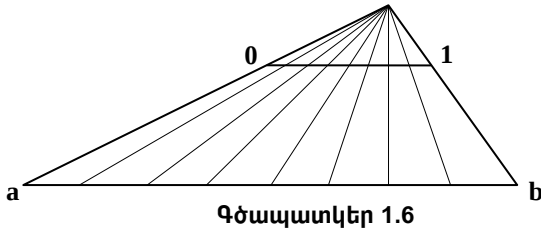
Սահմանում: Բնական թվերի բազմության իզոթությամբ հավասար իզոթություն ունեցող բազմությունը կոչվում է **հաշվելի**: Ներկայացնենք հաշվելի բազմության մեկ այլ սահմանում:

Սահմանում: Անվերջ բազմությունը կոչվում է **հաշվելի**, եթե դրա տարրերը հնարավոր է համարակալել:

Ակնհայտ է, որ առավել ճշգրիտ կլիներ հաշվելի բազմությունը կոչել **անվերջ, համարակալելի**: Հաճախ հաշվելի բազմության տարրերի համարակալելի լինելը ներկայացվում է նաև որպես հատկություն: Հաշվելի բազմության օրինակներ են բնական, ամբողջ, ռացիոնալ թվերի բազմությունները:

Սահմանում: [0;1] հատվածի բազմության իզոթությամբ հավասար իզոթություն ունեցող բազմությունը կոչվում է **կոնտինուում** իզոթությամբ բազմություն (լատիներեն՝ continuous՝ անընդհատ): Այսպիսով՝ եթե [0;1] հատվածի և [a;b] բազմության բոլոր կետերի միջև հնարավոր է ստեղծել փոխմիարժեք համապատասխանություն, ապա [a;b] բազմության իզոթությունը կոնտինուում է: Դա հարմար է ցույց տալ երկրաչափորեն՝ գծա-

պատկեր 1.6-ում պատկերված եղանակով կառուցելով փոխմիարժեք համապատասխանություն.



իրական և իռացիոնալ թվերի բազմություններն ունեն կոնստի-նուում հզորություն: Ավելին, իրական թվերի, օրինակ, $[a, b]$ ենթաբազմության կետերի բազմությունն ունի կոնստի-նուում հզորություն, քանի որ դրա տարրերը **հնարավոր չէ համարակալել**:

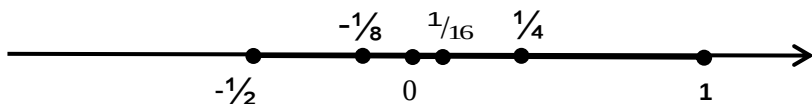
Կոնստի-նուում հզորությամբ բազմության կարևորագույն օրի-նակը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է կամ, որ նույնն է, ուղիղ գծի վրա բոլոր կետերի բազմությունը, իսկ ուղիղ գծին անընդհատ է: Քառակուսու, խորանարդի, հարթության և տարածության հզորու-թյունը նույնպես կոնստի-նուում է:

Հիպերկոնստի-նուում հզորություն ունեցող բազմության օրի-նակ է $[0,1]$ հատվածի վրա հնարավոր բոլոր ֆունկցիաների բազ-մությունը: Ակնհայտ է, որ այն ավելի հզոր է, քան կոնստի-նուումը:

Երկար տարիների ընթացքում մաթեմատիկոսները լուծում էին հետևյալ հիմնախնդիրը. արդյո՞ք գոյություն ունի բազմություն, որի հզորությունը միջանկյալ է հաշվելի և կոնստի-նուում հզորություննե-րի միջև: Ըստ Կոլմոգորովի՝ դա մաթեմատիկայի ամենախորթային և դժվարին հարցերից մեկն է: 20-րդ դարի 60-ական թվականների վերջին ամերիկացի մաթեմատիկոս Պոլ Կոյենը և չեխ մաթեմատի-կոս Պետր Վոպենկան գրեթե միաժամանակ և միմյանցից անկախ ապացուցեցին, որ ինչպես այդպիսի բազմության գոյություն ունե-նալը, այնպես էլ գոյություն չունենալը չեն հակասում բազմություն-ների տեսության մնացած բոլոր աքսիոմներին (ինչպես զուգահեռ-ների մասին աքսիոմի ընդունումը կամ ժխտումը չի հակասում երկ-րաչափության մնացած աքսիոմներին). այսինքն՝ աքսիոմի ընդուն-ման դեպքում հանգում ենք էվկլիդեսյան, իսկ ժխտման դեպքում՝ Լոբաչևսկու երկրաչափությանը:

Անվերջի գաղափարն ավելի լիարժեքորեն ընկալելու համար բերենք հետևյալ օրինակը. ենթադրենք՝ տրված է հետևյալ նշանա-փոխ հաջորդականությունը՝ $1, -1/2, 1/4, -1/8, 1/16, \dots$, որի յուրա-քանչյուր անդամ, սկսած երկրորդից, ստացվում է՝ նախորդը բազ-

մապատկելով $-1/2$ -ով, այսինքն՝ կիսելով և նշանափոխելով: Գծապատկեր 1.7-ում թվային առանցքի վրա պատկերված են այդ հաջորդականության մի քանի անդամներ:

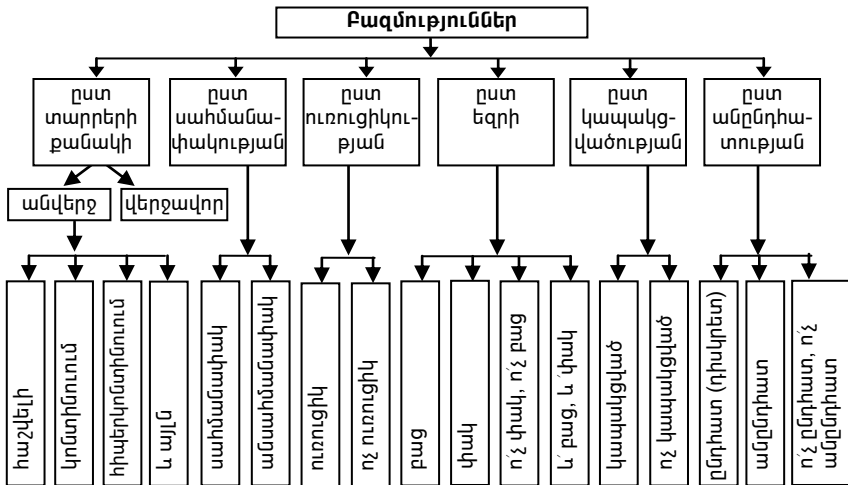


Գծապատկեր 1.7

Դիտարկենք 0 կետի ε շրջակայքը: Ենթադրենք՝ $\varepsilon_1 = 1/10$, այսինքն՝ դիտարկվում է $[-1/10; 1/10]$ հատվածը: Քննարկվող հաջորդականության այն անդամները, որոնք չեն պատկանում այդ հատվածին, չորսն են՝ 1, $-1/2$, $1/4$, $-1/8$, իսկ այդ հատվածին պատկանող անդամների քանակն անվերջ է: Եթե ε -ը փոքրացնենք, օրինակ, $\varepsilon_2 = 1/1000$, ապա վիճակը սկզբունքորեն չի փոխվի՝ քննարկվող հաջորդականության այն անդամները, որոնք չեն պատկանում $[-1/1000; 1/1000]$ հատվածին, նորից կլինեն վերջավոր քանակությամբ, իսկ այդ հատվածին պատկանող անդամների քանակը նորից կլինի անվերջ:

Իմիջիայլոց, այս օրինակից ուղղակիորեն հետևում է, որ եթե անվերջ բազմությունից հեռացնենք վերջավոր թվով տարրեր, ապա այն նորից կշարունակի հանդիսանալ անվերջ բազմություն: Ավելին, եթե անվերջ բազմությունից հեռացնենք դրա անվերջ ենթաբազմությունը, ապա հնարավոր է, որ այն մնա անվերջ բազմություն. օրինակ՝ եթե բոլոր իրական թվերի բազմությունից հեռացնենք բոլոր բացասական թվերը, ապա կմնա բոլոր ոչ բացասական թվերի բազմությունը, որը նույնպես անվերջ է: Իհարկե, միշտ չէ, որ անվերջ բազմությունից հեռացնելով անվերջ թվով տարրեր, կարող է մնալ անվերջ բազմություն: Այսպես՝ եթե բոլոր ոչ բացասական թվերի բազմությունից հեռացնենք բոլոր դրական թվերը, ապա կմնա միայն 0 թիվը, որը վերջավոր բազմություն է: Այլ դեպքում կարող է մնալ անվերջ բազմություն, որի հզորությունը փոքր կլինի սկզբնականից: Օրինակ՝ եթե բոլոր իրական թվերի բազմությունից հեռացնենք բոլոր իռացիոնալ թվերի բազմությունը, ապա մնացածը՝ բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմությունը, թեպետ անվերջ բազմություն է, կունենա ավելի թույլ՝ հաշվելի հզորություն:

Ներկայացնենք բազմությունների դասակարգումն ըստ մի քանի կարևորագույն հատկանիշների.



Գծապատկեր 1.8. Քաղնությունների դասակարգումը

1.1.2. Քաղնությունների տեսության ստեղծման պատմությունից

Մինչև 19-րդ դարի կեսը մաթեմատիկոսները հիմնականում դիտարկում էին վերջավոր քաղնությունները: Վերջավոր և անվերջ քաղնությունների տեսությունը հիմնադրել է Բեռնարդ Բոլցանոն՝ իր «Անվերջի պարադոքսները» գրքում (1850 թ.) ներկայացնելով դրա առաջին ուրվագիրը: Այդ աշխատությունում դիտարկվել են կամայական թվային քաղնություններ, ինչպես նաև դրանց համեմատության նպատակով սահմանվել է փոխմիարժեք համապատասխանության հասկացությունը:

1872–1897 թթ. (հիմնականում՝ 1872–1884 թթ.) Գեորգ Կանտորը հրապարակեց մի շարք աշխատանքներ, որոնցում համակարգված ձևով շարադրեց քաղնությունների տեսության հիմնական բաժինները: Նա մշակեց մաթեմատիկայի ստանդարտացման իր ծրագիրը, որի շրջանակներում յուրաքանչյուր մաթեմատիկական օբյեկտ պետք է հանդիսանար այս կամ այն տիպի քաղնություն:

Այս մոտեցումը նա շարադրեց գերմանական հայտնի՝ «Մաթեմատիկական տարեգիրք» պարբերականում: Այդ աշխատանքներում հեղինակը ոչ միայն ներմուծեց քաղնությունների տեսության հիմնական հասկացությունները, այլև մաթեմատիկական հարստացրեց նոր տիպի դատողություններով, որոնք կիրառեց քաղնություն-

ների տեսության թեորեմների ապացուցման համար: Ուստի ընդունված է ասել, որ **բազմությունների տեսությունը** ստեղծել է Գեորգ Կանտորը: Վերջինս, բազմությունը «սահմանելով» որպես «տվյալ հատկությամբ օժտված բոլոր օբյեկտների ամբողջություն», դրանք կոչեց բազմության **տարրեր** (էլեմենտներ): Ըստ նրա՝ բնական թիվը պետք է դիտարկել որպես բազմություն, որը կազմված է մեկ այլ բազմության միակ տարրից, որը կոչվում է «բնական հաջորդականություն», իսկ վերջինս, իր հերթին, բազմություն է, որն էլ մեկ այլ բազմության տարր է (տվյալ դեպքում՝ ամբողջ թվերի): Ընդ որում, «բազմություն» ընդհանուր հասկացությամբ, որն իր կողմից մաթեմատիկայում դիտարկվում էր որպես կենտրոնական, Կանտորը տալիս է քիչ բան պարզաբանող «սահմանումներ»: Օրինակ՝ «բազմությունը շատն է՝ ընկալված որպես ամբողջություն» և նման կարգի այլ ձևակերպումներ (սահմանումներ): Սա լրիվ համապատասխանում էր Կանտորի մտայնությամբ, ով իր ծրագիրն ընդգծված կերպով անվանում էր ոչ թե բազմությունների տեսություն (այդ եզրույթը հայտնվեց շատ ավելի ուշ), այլ **ուսմունք բազմությունների մասին**:

Կանտորի ծրագիրը դժգոհություն առաջացրեց ժամանակակից անվանի մաթեմատիկոսների շրջանում: Իր անհաշտ դիրքորոշմամբ հատկապես առանձնացավ Լեոպոլդ Կրոնեկերը, ով կարծում էր, որ մաթեմատիկական օբյեկտներ կարող են համարվել միայն բնական թվերը և այն, ինչն անմիջականորեն դրանց է վերաբերում (հայտնի է նրա հետևյալ արտահայտությունը. «Աստված ստեղծել է բնական թվերը, իսկ մնացյալը մարդու ձեռքի գործն է»): Բազմությունների տեսությունն ամբողջովին մերժում էին նաև այնպիսի հեղինակավոր մաթեմատիկոսներ, ինչպիսիք էին Զերման Շվարցը և Անրի Պուանկարեն:

Բայց և այնպես, այլ խոշոր մաթեմատիկոսներ, մասնավորապես՝ Գոթլոբ Ֆրեգեն, Ռիխարդ Դեդեկինդը և Դավիդ Հիլբերտը սատարեցին Կանտորին ամբողջ մաթեմատիկան բազմությունների տեսության լեզվով վերաշարադրելու գործում: Այդպիսով՝ բազմությունների տեսությունը դարձավ չափի տեսության և ինտեգրալի, տոպոլոգիայի և ֆունկցիոնալ վերլուծության հիմքը:

Բայց շուտով պարզվեց, որ Կանտորի՝ անվերջ բազմությունների հետ գործողությունների ժամանակ կիրառվող անսահմանափակ կամայականությունների դրույթը (իր արտահայտած՝ «մաթեմատիկայի էությունը դրա ազատության մեջ է» սկզբունքում) ի սկզբանե թերի է, և բացահայտվեցին մի շարք տեսական հակասություններ: Դայտնի դարձավ, որ տեսական պատկերացումների օգտագործման ժամանակ որոշ պնդումներ կարող են ապացուցվել իրենց ժխտում-

ների հետ միասին (իսկ այդ դեպքում, համաձայն ասույթների դասական տրամաբանության, կարող է «ապացուցվել» բացարձակապես յուրաքանչյուր պնդում):

Բերտրան Ռասելի հակասությունը հայտնաբերելուց հետո մաթեմատիկոսների մի մասը (օրինակ՝ Լյոյտզեն Էգբերտ Յան Բրաուերը և իր դպրոցը) որոշեց ամբողջովին հրաժարվել բազմությունների տեսության օգտագործումից: Դավիդ Հիլբերտի առաջնորդությամբ, մաթեմատիկոսների մեկ այլ խումբ ձեռնարկեց մի շարք փորձեր՝ հիմնավորելու բազմությունների տեսության այն հատվածը, որն իրենց կարծիքով առավել «պատասխանատու» էր վերը նշված հակասությունների համար:

1904–1908 թթ. Էռնեստ Ցերմելոն առաջարկեց **բազմությունների աքսիոմատիկ տեսության** առաջին մեկնակերպը, իսկ Ռասելը, դրանից անկախ, կատարելագործեց տրամաբանական ապարատը, ինչն ավելի ուշ զետեղեց «Մաթեմատիկայի հիմունքներ» մենագրությունում (1910–1913 թթ.): Այսպիսով՝ բազմությունների տեսությունը դրվեց աքսիոմատիկ հիմքի վրա: Հետագայում շատ հետազոտողներ վերանայեցին և փոփոխեցին այդ երկու համակարգերն էլ, բայց հիմնականում պահպանվեց դրանց բնույթը: Մինչև այժմ էլ դրանք հայտնի են որպես Ռասելի տիպերի տեսություն և Ցերմելոյի բազմությունների տեսություն: Ներկայումս Կանտորի տեսությունն ընդունված է անվանել «պարզունակ» բազմությունների տեսություն, իսկ նոր կառուցվածը՝ բազմությունների աքսիոմատիկ տեսություն:

Աքսիոմատիկ մոտեցման առանձնահատկությունը Կանտորի ծրագրի հիմքում առկա այն պատկերացումից հրաժարումն է, ըստ որի՝ ինչ-որ իդեալական աշխարհում իսկապես գոյություն ունեն բազմություններ: Աքսիոմատիկ տեսության շրջանակներում բազմությունները «գոյություն ունեն» բացառապես ձևականորեն, և դրանց հատկությունները կարող են էականորեն կախված լինել աքսիոմների համակարգի ընտրությունից: Այս փաստը միշտ քննադատության թիրախ է այն մաթեմատիկոսների կողմից, ովքեր չեն համաձայնում (ինչպես պնդում էր Հիլբերտը) ընդունել մաթեմատիկան որպես որևէ բովանդակությունից զուրկ սիմվոլների խաղ: Մասնավորապես՝ Նիկոլայ Լուզինը գրում է, որ «կոնստիտուում հզորությամբ բազմությունը, եթե դիտարկվում է միայն որպես կետերի բազմություն, որոշակի միավորված իրականություն է», որի տեղը կարդինալ թվերի շարքում չի կարող կախված լինել այն հանգամանքից, թե որպես աքսիոմ ընդունվում է **կոնստիտուում վարկածը**, թե դրա ժխտումը:

Այժմ բազմությունների աքսիոմատիկ տեսություններից առավել ընդունված է **ZFC-ն (Ցերմելո-Ֆրենկելի տեսությունը՝ ընտրության աքսիոմով)**: Իհարկե, ոչ բոլոր մաթեմատիկոսներն են անվերապահորեն ընդունում դա: Այսպես, օրինակ, Էմիլ Բոդելը և Անրի Լեբեգը կարծում են, որ այս աքսիոմի միջոցով ստացված ապացույցներն ունեն այլ ճանաչողական արժեք, քան այն ապացույցները, որոնք այդ աքսիոմից կախված չեն: Իսկ այլ մաթեմատիկոսներ, օրինակ՝ Ֆելիքս Զաուսդորֆը և Ադոլֆ Ֆրենկելը ընդունում են Ցերմելո-Ֆրենկելի բոլոր աքսիոմների ակնհայտությունը:

Բազմությունների տեսության ազդեցությունը ժամանակակից մաթեմատիկայի զարգացման վրա շատ մեծ է: Առաջին հերթին, դա հիմք դարձավ մաթեմատիկայի մի շարք նոր ճյուղերի ստեղծման համար (իրական փոփոխականների ֆունկցիաների տեսություն, ընդհանուր տոպոլոգիա, ընդհանուր հանրահաշիվ, ֆունկցիոնալ վերլուծություն և այլն):

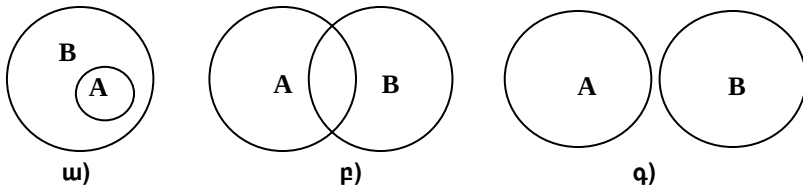
Բազմությունների տեսության մեթոդներն աստիճանաբար նորանոր կիրառություններ են գտնում նաև մաթեմատիկայի դասական բաժիններում: Այսպես՝ մաթեմատիկական վերլուծության մեջ դրանք լայնորեն կիրառվում են դիֆերենցիալ հավասարումների որակական տեսությունում, վարիացիոն հաշվում, հավանականությունների տեսությունում և այլուր:

Վերջապես, բազմությունների տեսությունը զգալի ազդեցություն է գործել հենց մաթեմատիկա առարկայի կամ դրա բաժինների (օրինակ՝ երկրաչափության) ըմբռնման վրա: Միայն դրա միջոցով հնարավոր դարձավ հստակորեն ձևակերպել օբյեկտների համակարգերի **իզոմորֆիզմը**, որի համաձայն՝ ցանկացած մաթեմատիկական տեսություն հետազոտում է այս կամ այն օբյեկտների համակարգն ընդամենը իզոմորֆիզմի ճշգրտությամբ:

Ինչ վերաբերում է պնդումների մաթեմատիկական հիմնավորման հարցերում բազմությունների տեսության նշանակությանը (այսինքն՝ խիստ, տրամաբանորեն անթերի մաթեմատիկական տեսությունների կառուցմանը), ապա պետք է նկատի ունենալ, որ դա նույնպես կարիք ունի հիմնավորման: Ավելին, անվերջության մասին մաթեմատիկական ուսմունքի հիմնավորման հետ կապված բոլոր տրամաբանական դժվարությունները, ըստ բազմությունների ընդհանուր տեսության, ավելի են սրվում:

1.1.3. Գործողություններ բազմությունների հետ

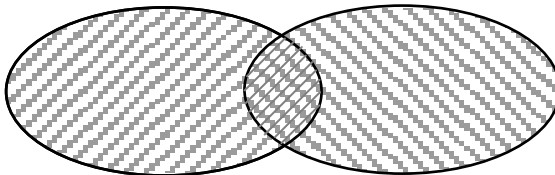
Սովորաբար, բազմությունը նշանակում են լատիներեն այբու-
բենի մեծատառերով՝ A , B և այլն: A և B բազմությունները կարող են
միմյանց հետ տարբեր «հարաբերություններ» ունենալ: Եթե A բազ-
մության բոլոր տարրերը պատկանում են B -ին, ապա ասում են, որ
 A -ն B -ի **ենթաբազմությունն** է՝ $A \subseteq B$: Ակնհայտ է, որ եթե $A \subseteq B$
և $B \subseteq A$, ապա $A = B$, այսինքն՝ A և B բազմությունները **հավա-
սար** են, քանի որ կազմված են միևնույն տարրերից: Եթե A բազ-
մության բոլոր տարրերը պատկանում են B -ին, բայց $A \neq B$, ապա
 A -ն B -ի **խիստ ենթաբազմությունն** է, քանի որ, A -ի տարրերից
բացի, B -ն պարունակում է գոնե մեկ տարր ևս, որը A -ին չի պատ-
կանում՝ $A \subset B$ (գծապատկեր 1.8.ա):



Գծապատկեր 1.8

Եթե A -ն և B -ն ընդհանուր տարրեր (կետեր) չունեն, ապա
դրանց հատումը **դատարկ բազմություն** է՝ $\emptyset$ (գծապատկեր 1.8.գ):

Ընդունված է ասել, որ A և B բազմություններն **ընդհանուր վի-
ճակում են**, եթե գոյություն ունի տարր, որը պատկանում է կա՛մ
միայն A -ին, կա՛մ միայն B -ին, կամ էլ՝ երկու բազմությանը միաժա-
մանակ (գծապատկեր 1.9):

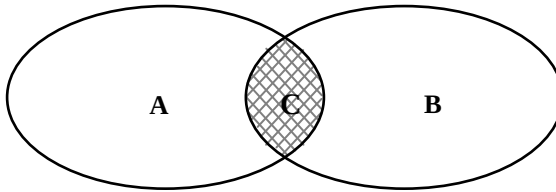


Գծապատկեր 1.9

Սահմանում: C բազմությունը կոչվում է A և B բազմությունների
հատում, եթե պարունակում է դրանց **բոլոր ընդհանուր** տար-
րերը, և միայն դրանք: Գծապատկեր 1.10-ում ընդգծված է եր-

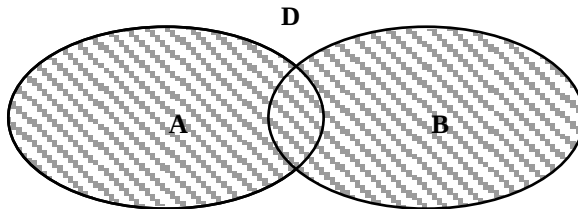
կու բազմության C հատումը, որը նշանակվում է հետևյալ կերպ.

$$C = A \cap B:$$



Գծապատկեր 1.10

Սահմանում: D բազմությունը կոչվում է A և B բազմությունների **միավորում**, եթե պարունակում է դրանց բոլոր տարրերը, և միայն դրանք:

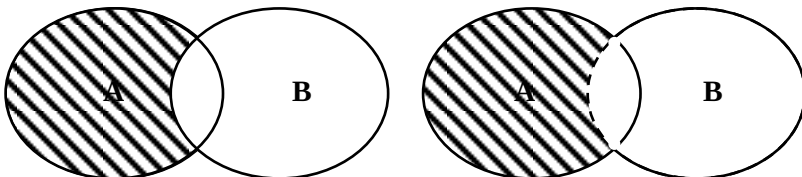


Գծապատկեր 1.11

Տվյալ գծապատկերում ընդգծվել է D -ն. $D = A \cup B$:

Սահմանում: E բազմությունը կոչվում է A և B բազմությունների **տարբերություն**, եթե պարունակում է A -ի բոլոր այն տարրերը, որոնք B -ին չեն պատկանում, և միայն դրանք:

Գծապատկեր 1.12-ում ընդգծվածը E -ն է: Նշանակվում է այսպես՝ $E = A \setminus B$, իսկ ավելի հազվադեպ՝ $E = A - B$:

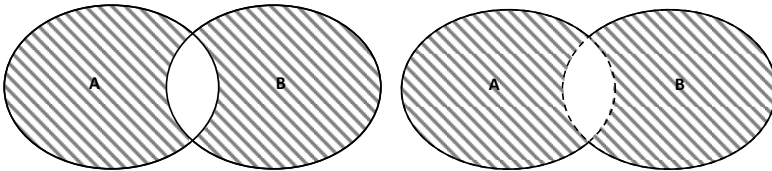


Գծապատկեր 1.12

Նկատենք, որ $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, բայց $A \setminus B \neq B \setminus A$:

Հիշենք, որ $\emptyset$ սիմվոլով նշանակվում է դատարկ բազմությունը: Տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները՝ $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$:

Սահմանում: F բազմությունը կոչվում է A և B բազմությունների **սիմետրիկ տարբերություն**, եթե պարունակում է A -ի և B -ի բոլոր ոչ ընդհանուր տարրերը (կետերը), և միայն դրանք: Գծապատկեր 1.13-ում ընդգծվածը F -ն է: Նշանակվում է $F = A \Delta B$, իսկ ավելի հազվադեպ՝ $F = A \ominus B$ սիմվոլներով:



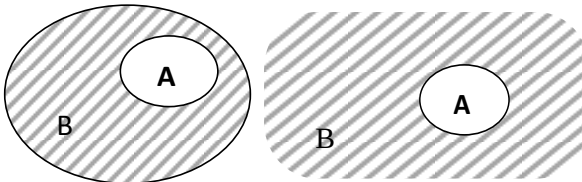
Գծապատկեր 1.13

A և B բազմությունների սիմետրիկ տարբերությունը կարելի է ստանալ երկու եղանակով: Առաջին՝ այն հավասար է A և B բազմությունների միավորման և հատման տարբերությանը, և երկրորդ՝ այն հավասար է A և B ու B և A բազմությունների տարբերությունների միավորմանը:

$$F = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A):$$

Այսպիսով՝ սիմետրիկ տարբերությունը ներկայացվեց երեք գործողությամբ: Ընդ որում, նախորդ երեք գործողությունները մեկը մյուսով արտահայտել հնարավոր չէ:

Երբեմն նշվում է նաև բազմությունների կամ դրանց կոմբինացիաների **լրացման** կամ **ժխտման** մասին (նշանակվում է $\neg A$, $\bar{A}$, A^c կամ $\setminus A$ սիմվոլներով):



Գծապատկեր 1.14

Գծապատկեր 1.14-ում ընդգծվածը A բազմության լրացումն է B բազմության մեջ (նկատմամբ)՝ $\neg A = B \setminus A$:

Պարզ է, որ կոնկրետ գործողություն կատարելու համար պետք է նշվի, թե A -ի լրացումը ո՞ր բազմության նկատմամբ է կատարվում:

Բազմության տարրերը կարող են ունենալ տարբեր աստիճանի կարգավորվածություններ:

Եթե A և B բազմությունները վերջավոր են և կազմված համապատասխանաբար՝ m և n տարրերից, ապա.

1. C հատում - բազմության տարրերի առավելագույն քանակը հավասար է $\min \{m; n\}$,
2. C հատում - բազմության տարրերի նվազագույն քանակը հավասար է զրոյի,
3. D միավորում - բազմության տարրերի առավելագույն քանակը հավասար է $m + n$,
4. D միավորում - բազմության տարրերի նվազագույն քանակը հավասար է $\max \{m; n\}$,
5. ա) $E = A \setminus B$ տարբերություն - բազմության տարրերի առավելագույն քանակը հավասար է m ,
բ) $E = B \setminus A$ տարբերություն - բազմության տարրերի առավելագույն քանակը հավասար է n ,
6. ա) $E = A \setminus B$ տարբերություն - բազմության տարրերի նվազագույն քանակը հավասար է 0 -ի,
բ) $E = B \setminus A$ տարբերություն - բազմության տարրերի առավելագույն քանակը հավասար է 0 -ի,
7. $F = A \Delta B$ բազմության տարրերի առավելագույն քանակը հավասար է $m + n$ -ի,
8. $F = A \Delta B$ բազմության տարրերի նվազագույն քանակը հավասար է $|m - n|$,
9. $\neg A = B \setminus A$ բազմության տարրերի նվազագույն քանակը կլինի $n - m$ (եթե $n \geq m$), և զրո, եթե $n < m$,
10. $\neg A = B \setminus A$ բազմության տարրերի առավելագույն քանակը կլինի n :

Փաստորեն, $\neg A = (A \cup B) \setminus A$, եթե $\neg A$ -ն A -ի լրացումն է մինչև B :

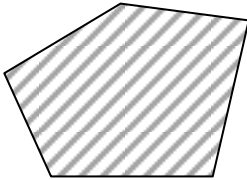
$$11. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$12. \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

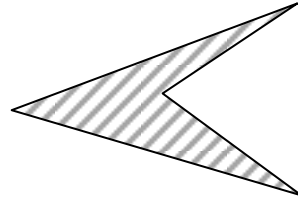
Վերջին երկուսը կոչվում են Մորգանի օրենքներ:

1.1.4. Ուռուցիկ բազմությունները և դրանց հատկությունները

Սովորաբար, դպրոցական դասընթացում **բազմանկյունը** կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ամբողջությամբ մնում է իր յուրաքանչյուր եզրով տարված ուղիղով առաջացած կիսահարթություններից միայն մեկում (գծապատկեր 1.15):



ա) ուռուցիկ բազմանկյուն

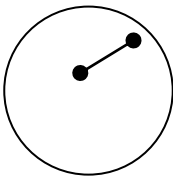


բ) ոչ ուռուցիկ բազմանկյուն

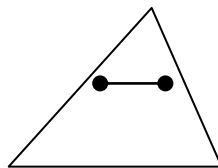
Գծապատկեր 1.15

Բուհական դասընթացում, որտեղ քննարկվում են մաս այնպիսի բազմություններ, որոնք բազմանկյուններ չեն, բազմության ուռուցիկության սահմանումն այլ է: Նախ՝ տանք ուռուցիկության երկրաչափական սահմանումը:

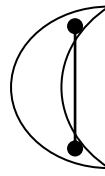
Սահմանում: Բազմությունը կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե դրան պատկանող ցանկացած երկու չհամընկնող կետերի հետ միասին բազմությանն է պատկանում մաս այդ կետերը միացնող հատվածն ամբողջությամբ (գծապատկեր 1.16.ա, բ):
Հակառակ դեպքում բազմությունը **ոչ ուռուցիկ** է (գծապատկեր 1.16.գ, դ):



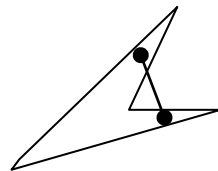
ա) ուռուցիկ



բ) ուռուցիկ



գ) ոչ ուռուցիկ



դ) ոչ ուռուցիկ

Գծապատկեր 1.16

Ուռուցիկ բազմությունների օրինակներ են հատվածը, ուղիղը, շրջանը, եռանկյունը և այլն: Ոչ ուռուցիկ բազմությունների օրինակ-

ներ են շրջանագիծը, ոչ ուռուցիկ քառանկյունը (գծապատկեր 1.16. դ) և այլն:

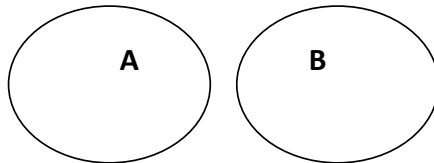
Այժմ վերլուծենք ուռուցիկ բազմության սահմանումը.

Սահմանում: A բազմությունը կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $\bar{x}_1 \in A$, $\bar{x}_2 \in A$ և $0 \leq \lambda \leq 1$ պայմաններից հետևում է՝ $\lambda \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bar{x}_2 \in A$:

Կետը և դատարկ բազմությունը պայմանականորեն կհամարենք ուռուցիկ բազմություններ, որպեսզի մի շարք ձևակերպումներում ստիպված չլինենք հատուկ նկարագրել այդ դեպքերը:

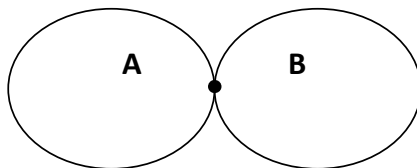
Թեորեմ: Ուռուցիկ բազմությունների հատումն ուռուցիկ բազմություն է:

ա) A և B ուռուցիկ բազմությունները չունեն ընդհանուր կետեր՝ $A \cap B = \emptyset$: Այս դեպքում $\emptyset$ -ը պայմանականորեն համարվում է ուռուցիկ, թեպետ դրան պատկանող երկու չհամընկնող կետ չկա (գծապատկեր 1.17):



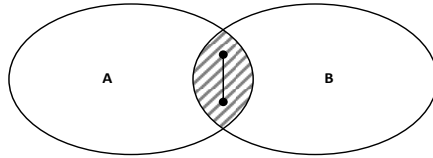
Գծապատկեր 1.17

բ) A և B ուռուցիկ բազմություններն ունեն մեկ ընդհանուր կետ: Այս դեպքում միակ կետը պայմանականորեն համարվում է ուռուցիկ, թեպետ դրան պատկանող երկու չհամընկնող կետ նույնպես չկա (գծապատկեր 1.18):



Գծապատկեր 1.18

գ) A և B ուռուցիկ բազմություններն ունեն 1-ից ավելի ընդհանուր կետեր՝ $A \cap B = C$: Ըստ թեորեմի՝ C բազմությունն ուռուցիկ է (գծապատկեր 1.19):



Գծապատկեր 1.19

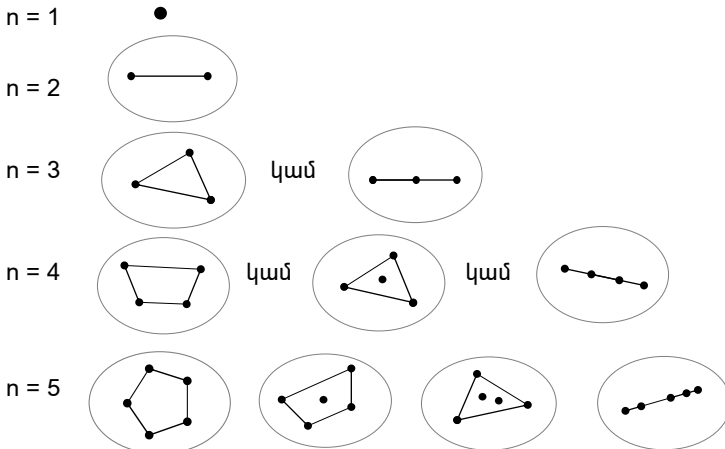
Թեորեմ: Գծային հավասարումների և ոչ խիստ անհավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունն ուռուցիկ, փակ բազմություն է:

Սրանից հետևում է, որ գծային հավասարումների համակարգի ոչ բացասական **լուծումների բազմությունը նույնպես ուռուցիկ, փակ բազմություն է:**

Սահմանում: $\bar{x}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ կետը կոչվում է $x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերի

ուռուցիկ կոմբինացիա, եթե՝ $\alpha_i \geq 0$ ($i = \overline{1; n}$) և $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$:

M ուռուցիկ բազմության վերջավոր n թվով կետերի ուռուցիկ կոմբինացիան պատկանում է M բազմությանը: Ցույց տանք օրինակներով (գծապատկեր 1.20).



Գծապատկեր 1.20

Եթե A-ն և B-ն փակ, ուռուցիկ և ընդհանուր կետեր չունեցող բազմություններ են, ապա գոյություն ունի հարթություն, որը խիստ անջատում է A և B բազմությունները:

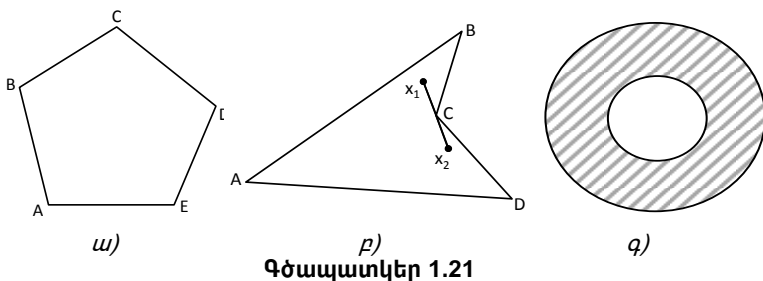
Սահմանում: Բազմության $\overline{x_0}$ կետը կոչվում է **ծայրակետ**, եթե գոյություն չունեն այդ բազմությանը պատկանող չհամընկնող $\overline{x_1}$ և $\overline{x_2}$ կետեր այնպես, որ $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, երբ $0 < \lambda < 1$:

Հատվածն ունի 2 ծայրակետ, եռանկյունը՝ 3, ուռուցիկ քառանկյունը՝ 4, ուռուցիկ հնգանկյունը՝ 5 և այլն:

Շրջանի ծայրակետերը այդ շրջանն առաջացնող շրջանագծի բոլոր կետերն են: Ուռուցիկ բազմանկյունը կարող է ունենալ վերջավոր կամ անվերջ թվով ծայրակետեր կամ ընդհանրապես ծայրակետեր չունենալ:

Եթե ծայրակետերի քանակը վերջավոր է, ապա դրանք կոչվում են նաև **գագաթներ**: Այսպիսով՝ պարզ է, որ յուրաքանչյուր գագաթնա ծայրակետ է, բայց հակառակը ճիշտ չէ:

Ծայրակետի սահմանումից ակնհայտ է դառնում, որ բազմությանը պատկանող յուրաքանչյուր ծայրակետ նաև եզրային կետ է, իսկ հակառակը ճիշտ չէ (գծապատկեր 1.21): Այլ կերպ ասած, տրված բազմության ծայրակետերի համախումբը նույն բազմությանը պատկանող և դրա համար եզրային կետերի ենթաբազմությունն է:



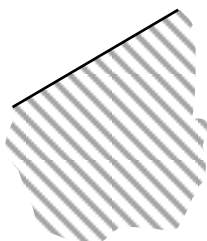
Գծապատկեր 1.21

ա) A, B, C, D, E-ն և' ծայրակետեր են, և' գագաթներ: AB, BC, CD, DE և AE հատվածների բոլոր կետերը եզրային են (կամ՝ ABCDEA փակ բեկյալի բոլոր կետերը եզրային են):

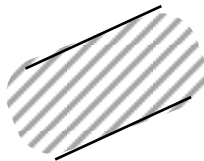
բ) A, B, D-ն և' ծայրակետեր են, և' գագաթներ: Բազմության եզրն է ABCD փակ բեկյալը: C-ն ծայրակետ չէ, քանի որ այն կարելի է ներկայացնել բազմությանը պատկանող և չհամընկող x_1 և x_2 կետերի միջոցով՝ որպես $x_1 x_2$ հատվածի ներքին կետ:

գ) Մեծ շրջանագծի բոլոր կետերը ծայրակետեր են, իսկ փոքր շրջանագծինը՝ ոչ: Գագաթներ ընդհանրապես չկան, քանի որ ծայրակետերի քանակն անվերջ է:

Վերջավոր թվով ծայրակետեր ունեցող փակ, ուռուցիկ բազմությունը կոչվում է **բազմանիստային** (հարթության վրա՝ **բազմանկյունային**), իսկ վերջավոր թվով ծայրակետեր ունեցող փակ, սահմանափակ, ուռուցիկ բազմությունը՝ **բազմանիստ** (հարթության վրա՝ **բազմանկյուն**): Յուրաքանչյուր բազմանիստ նաև բազմանիստային բազմություն է: Բազմանիստային (բազմանկյունային) բազմության ծայրակետերը անվանում են նաև **գագաթներ**: Բազմանիստային (բազմանկյունային) բազմությունը կարող է նաև ծայրակետեր (գագաթներ) չունենալ (գծապատկեր 1.22):



ա) կիսահարթություն



բ) անսահմանափակ շերտ



գ) հարթություն

Գծապատկեր 1.22

Բազմանիստի կամ բազմանիստային բազմության միստերի կողմերը կոչվում են **կողեր**, որոնք կարող են լինել հատվածներ, ճառագայթներ և ուղիղներ:

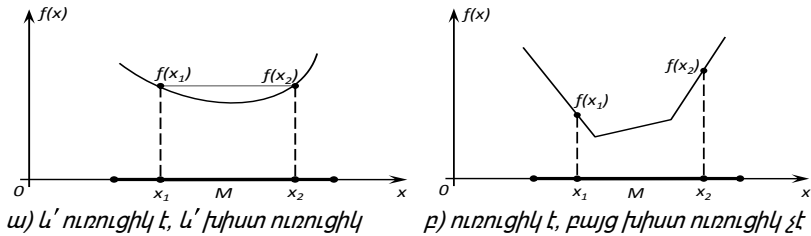
Փակ, սահմանափակ, ուռուցիկ բազմությունն ունի գոնե մեկ ծայրակետ:

Բազմանիստային բազմությունը կարելի է ներկայացնել իր վերջավոր թվով գագաթների **ուռուցիկ** և անսահմանափակ կողերի ուղղությունների վեկտորների ոչ բացասական գծային կոմբինացիայով:

1.1.5. Ուռուցիկ ու գոգավոր ֆունկցիաներ. դրանց հատկությունները

Սահմանում: $f(\bar{x})$ ֆունկցիան, որոշված M ուռուցիկ բազմության վրա, կոչվում է **ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $\bar{x}_1 \in M$, $\bar{x}_2 \in M$ կետերի և ցանկացած $0 \leq \lambda \leq 1$ թվի համար տեղի ունի ենտենի անհավասարությունը՝ $f(\lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2) \leq \lambda f(\bar{x}_1) + (1-\lambda)f(\bar{x}_2)$:

$f(\bar{x})$ ֆունկցիայի ուռուցիկությունը գրաֆիկորեն նշանակում է, որ $f(\bar{x})$ -ի ցանկացած երկու կետը միացնող հատվածը գտնվում է ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կամ դրանից վերև.



Գծապատկեր 1.23

Սահմանում: $f(\bar{x})$ ֆունկցիան, որոշված M ուռուցիկ բազմության վրա, կոչվում է **խիստ ուռուցիկ**, եթե ցանկացած $\bar{x}_1 \in M$, $\bar{x}_2 \in M$, $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ կետերի և ցանկացած $0 < \lambda < 1$ թվի համար տեղի ունի՝ $f(\lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2) < \lambda f(\bar{x}_1) + (1-\lambda)f(\bar{x}_2)$:

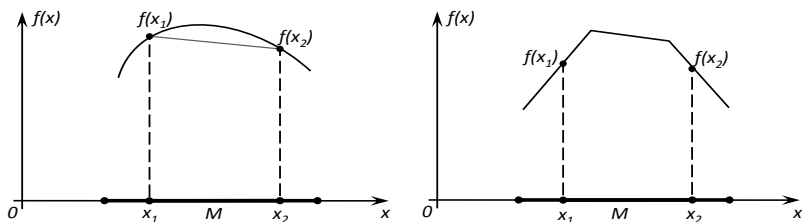
$f(\bar{x})$ ֆունկցիայի խիստ ուռուցիկությունը գրաֆիկորեն նշանակում է, որ $f(\bar{x})$ -ի ցանկացած երկու տարբեր կետերը միացնող հատվածը գտնվում է ֆունկցիայի գրաֆիկից վերև (գծապատկեր 1.23):

Սահմանում: $f(\bar{x})$ ֆունկցիան, որոշված M ուռուցիկ բազմության վրա, կոչվում է **գոգավոր**, եթե ցանկացած $\bar{x}_1 \in M$, $\bar{x}_2 \in M$ կետերի և ցանկացած $0 \leq \lambda \leq 1$ թվի համար տեղի ունի՝ $f(\lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2) \geq \lambda f(\bar{x}_1) + (1-\lambda)f(\bar{x}_2)$:

$f(\bar{x})$ ֆունկցիայի գոգավորությունը գրաֆիկորեն նշանակում է, որ $f(\bar{x})$ -ի ցանկացած երկու կետը միացնող հատվածը գտնվում է ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կամ դրանից ներքև.

Սահմանում: $f(\bar{x})$ ֆունկցիան, որոշված M ուռուցիկ բազմության վրա, կոչվում է **խիստ գոգավոր**, եթե ցանկացած $\bar{x}_1 \in M$, $\bar{x}_2 \in M$, $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ կետերի և ցանկացած $0 < \lambda < 1$ թվի համար տեղի ունի՝ $f(\lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2) > \lambda f(\bar{x}_1) + (1-\lambda)f(\bar{x}_2)$:

$f(\bar{x})$ ֆունկցիայի խիստ գոգավորությունը գրաֆիկորեն (երկրաչափորեն) նշանակում է, որ $f(\bar{x})$ -ի ցանկացած երկու տարբեր կետերը միացնող հատվածը գտնվում է ֆունկցիայի գրաֆիկից ներքև (գծապատկեր 1.24):



ա) և՛ գոգավոր է, և՛ խիստ գոգավոր բ) գորգավոր է, բայց խիստ գոգավոր չէ
Գծապատկեր 1.24

Ակնհայտ է, որ եթե $f(\bar{x})$ ֆունկցիան ուռուցիկ է, ապա $-f(\bar{x})$ -ը գոգավոր է, և ընդհակառակը:

Թեորեմ: Ուռուցիկ ֆունկցիաների գումարը ուռուցիկ ֆունկցիա է:

Թեորեմ: Գոգավոր ֆունկցիաների գումարը գոգավոր ֆունկցիա է:

Ոչ բացասական թվով բազմապատկվելու դեպքում ֆունկցիան պահպանում է իր ուռուցիկությունը (գոգավորությունը):

Ոչ դրական թվով բազմապատկվելու դեպքում ուռուցիկ ֆունկցիան վերածվում է գոգավորի, իսկ գոգավոր ֆունկցիան՝ ուռուցիկի:

Դրական թվով բազմապատկվելու դեպքում խիստ ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիան մնում է խիստ ուռուցիկ (գոգավոր):

Բացասական թվով բազմապատկվելու դեպքում խիստ ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիան վերածվում է խիստ գոգավորի (ուռուցիկի):

Թեորեմ: Որպեսզի իր առաջին կարգի ածանցյալների հետ միասին անընդհատ՝ $f(\bar{x})$ ֆունկցիան լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $\bar{x}_1 \in M$, $\bar{x}_2 \in M$ կետերի համար տեղի ունենա $\nabla f(\bar{x}_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \leq f(\bar{x}_2) - f(\bar{x}_1)$ պայմանը, որտեղ $\nabla f(\bar{x}_1)$ -ը $\bar{x}_1$ կետում $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի առաջին

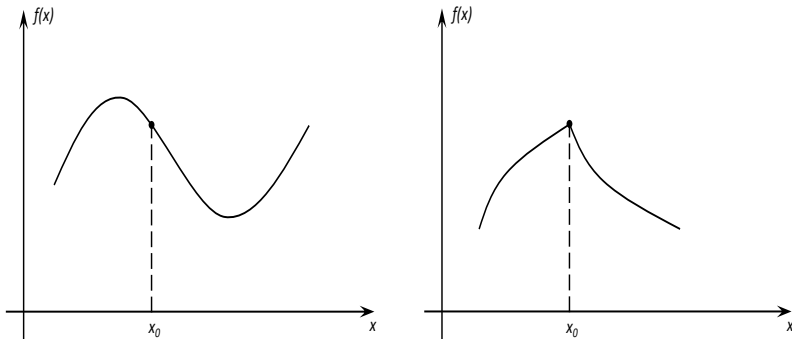
կարգի մասնակի ածանցյալների արժեքներից կազմված վեկտորն է և կոչվում է ֆունկցիայի **գրադիենտ** $\vec{\nabla}_1$ կետում:

Ուռուցիկ ֆունկցիայի համար կրկնակի ածանցյալը ոչ բացասական է, իսկ գոգավոր ֆունկցիայի համար՝ ոչ դրական: Խիստ ուռուցիկ ֆունկցիայի կրկնակի ածանցյալը դրական է, իսկ խիստ գոգավորինը՝ բացասական:

Ֆունկցիան կարող է լինել. ա) միայն ուռուցիկ, բ) միայն գոգավոր, գ) և՛ ուռուցիկ, և՛ գոգավոր (միայն ուղիղ գիծը կամ դրա մասերը), դ) ոչ ուռուցիկ, ոչ գոգավոր (օրինակ՝ սինուսոիդը):

Միևնույն կորը, իհարկե, կարող է կազմված լինել ուռուցիկ և գոգավոր մասերից:

Կորի ուռուցիկ և գոգավոր մասերն առանձնացնող կետերի աբսցիսները կոչվում են **շրջման կետեր** (գծապատկեր 1.25): Շրջման կետերում ֆունկցիայի կրկնակի ածանցյալը կա՛մ զրո է, կա՛մ գոյություն չունի, բայց երկու դեպքերում էլ փոխում է իր նշանը:



ա) կրկնակի ածանցյալը զրո է բ) կրկնակի ածանցյալը գոյություն չունի

Գծապատկեր 1.25

Թեորեմ: Եթե $f(\bar{x})$ -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է՝ որոշված M ուռուցիկ բազմության վրա, ապա $f(\bar{x})$ -ի **լոկալ** (տեղային) և **գլոբալ** (բացարձակ, ընդհանուր) մինիմումները M բազմության վրա համընկնում են:

Թեորեմ: Եթե $f(\bar{x})$ -ը գոգավոր ֆունկցիա է՝ տրված M ուռուցիկ բազմության վրա, ապա $f(\bar{x})$ -ի լոկալ և գլոբալ մաքսիմումները M բազմության վրա համընկնում են:

Չեռևանք 1. Եթե $f(\bar{x})$ ուռուցիկ ֆունկցիայի բացարձակ փոքրագույն արժեքը հասանելի է M ուռուցիկ բազմության երկու տարբեր կետերում, ապա այն հասանելի է նաև այդ կետերը միացնող հատվածի բոլոր կետերում:

Չեռևանք 2. Եթե $f(\bar{x})$ գոգավոր ֆունկցիայի բացարձակ մեծագույն արժեքը հասանելի է M ուռուցիկ բազմության երկու տարբեր կետերում, ապա այն հասանելի է նաև այդ կետերը միացնող հատվածի բոլոր կետերում:

Չեռևանք 3. Եթե $f(\bar{x})$ -ը խիստ ուռուցիկ ֆունկցիա է, ապա այն իր բացարձակ փոքրագույն արժեքը M ուռուցիկ, փակ բազմության վրա ընդունում է միայն մեկ կետում:

Չեռևանք 4. Եթե $f(\bar{x})$ -ը խիստ գոգավոր ֆունկցիա է, ապա այն իր բացարձակ մեծագույն արժեքը M ուռուցիկ, փակ բազմության վրա ընդունում է միայն մեկ կետում:

Թեորեմ: Եթե $f(\bar{x})$ ուռուցիկ (գոգավոր) ֆունկցիան ունի անընդհատ առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներ M ուռուցիկ բազմության ներքին կետերում, և $\nabla f(\bar{x}_0) = 0$, ապա $\bar{x}_0$ -ն $f(\bar{x})$ ֆունկցիայի բացարձակ մինիմումի (մաքսիմումի) կետ է:

Եթե $f(\bar{x})$ -ը ուռուցիկ ֆունկցիա է, ապա այն M ուռուցիկ, փակ և ներքևից սահմանափակ բազմության վրա ընդունում է բացարձակ մաքսիմում արժեք մեկ կամ ավելի ծայրակետերում (եթե բացարձակ մաքսիմումը վերջավոր է):

Նման ձևով, եթե $f(\bar{x})$ -ը գոգավոր ֆունկցիա է, ապա այն M ուռուցիկ, փակ և ներքևից սահմանափակ բազմության վրա ընդունում է բացարձակ մինիմում արժեք մեկ կամ ավելի ծայրակետերում (եթե բացարձակ մինիմումը վերջավոր է):

Վերևում օգտագործված «**ներքևից սահմանափակ բազմություն**» արտահայտությունը պետք է հասկանալ այն իմաստով, որ այն չի պարունակում անվերջ փոքր տարր:

1.2. ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

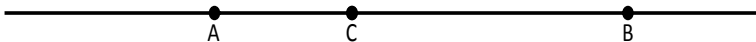
1.2.1. Տեղեկություններ գծային ծրագրավորման մասին

Գծային ծրագրավորումը մաթեմատիկական մեթոդ է, որը նախատեսված է գծային ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքները փնտրելու համար՝ գծային հավասարումների և/կամ ոչ խիստ անհավասարումների տեսքով տրված սահմանափակումների դեպքում:

Տնտեսագիտական խնդիրներ լուծելիս գծային ծրագրավորումն օգտագործվում է սահմանափակ հնարավորությունների դեպքում՝ զործունեության լավագույն ձևերի, ծրագրերի որոնման համար: Սահմանափակ հնարավորություններ ասելով պետք է նկատի ունենալ նյութական, ֆինանսական և այլ սահմանափակ հատկացումներն ու պաշարները:

Նախ՝ քննարկենք հետևյալ պարզագույն խնդիրը.

A և B գյուղերի միջև հեռավորությունը a կիլոմետր է, և դրանք միացված են ճանապարհով: Այդ ճանապարհի n° կետում պետք է կառուցել դպրոցը (գծապատկեր 1.26), որպեսզի աշակերտները նվազագույն ճանապարհ անցնեն: Հարկ է հաշվի առնել դպրոց գնալն ու այնտեղից վերադառնալը:



Գծապատկեր 1.26

$AB=a$ կմ, A գյուղում ապրում է 100 աշակերտ, իսկ B գյուղում՝ 50:

Լուծում: Ակնհայտ է, որ դպրոցը պետք է կառուցվի AB հատվածի որևէ կետում: Ենթադրենք՝ այն կառուցվում է C կետում: Նշանակենք՝ $AC=x \geq 0$, $\Rightarrow CB=AB-AC=a-x$, $x \leq a$:

A գյուղի 100 աշակերտը միասին կանցնի՝ $2 \cdot 100 \cdot x$, իսկ B գյուղի 50 աշակերտը միասին՝ $2 \cdot 50 (a-x)$ ճանապարհ: Հետևաբար՝ $2 \cdot 100x + 2 \cdot 50(a-x) \rightarrow \min$, որը պարզագույն ձևափոխություններից հետո կստանա հետևյալ տեսքը.

$$100a + 100x \rightarrow \min:$$

Քանի որ $100a$ -ն հաստատուն մեծություն է, ապա գումարային ճանապարհի նվազագույն արժեք կունենանք, երբ $100x \rightarrow \min$, որի լուծումն ակնհայտ է՝ $x=0$: Այսինքն՝ դպրոցը պետք է կառու-

ցել A գյուղում, իսկ B գյուղի 50 աշակերտը պետք է դպրոց հաճախի A գյուղում:

Խնդրի ճիշտ պատասխանը փոքր-ինչ անսպասելի է, քանի որ AB հատվածի հնարավոր կետերից «լավագույնն» է A կետը: Փորձը ցույց է տալիս, որ ուսանողները երբեք չեն տալիս այս խնդրի ճիշտ պատասխանը, այլ որպես այդպիսին առաջարկում են AB հատվածի ոչ եզրային կետերը, ճիշտ է, սովորաբար, A կետին ավելի մոտ, քան B-ին, ձգտելով «հավասարակշռված» լուծման, որն իրենց թվում է ավելի «արդարացի» և «ռացիոնալ»: Նկատենք նաև, որ խնդրի ճիշտ պատասխանը չի փոխվի, եթե, օրինակ, բնակավայրերից մեկում լինի 1000, իսկ մյուսում՝ 999 աշակերտ, այսինքն՝ աշակերտների թվի չնչին առավելությունը ավելի մեծ թվով աշակերտներ ունեցող բնակավայրը դարձնում է նախընտրելի:

Այս օրինակում մենք առնչվեցինք գծային մոդելների մի կարևոր առանձնահատկության հետ՝ ըստ որի **լավագույն (օպտիմալ) լուծումը գտնվեց հնարավոր լուծումների բազմության եզրում** (եզրային կետում կամ գագաթում):

Այս խնդրի սահմանափակումներն էին՝ $x \geq 0$ և $a - x \geq 0$, իսկ նպատակի մաթեմատիկական նկարագրությունը՝ $200x + 100(a - x) \rightarrow \min$: Խնդիրը ներկայացնենք ընդունված տեսքով.

$$200x + 100(a - x) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$a - x \geq 0, \quad (2)$$

$$x \geq 0: \quad (3)$$

(1)-ը կոչվում է **նպատակային ֆունկցիա**, (2)-ը՝ **հիմնական սահմանափակումների համակարգ**, (3)-ը՝ **յուրաքանչյուր փոփոխականի նկատմամբ կիրառվող սահմանափակումների համակարգ**: Վերևում քննարկվածը **գծային ծրագրավորման խնդիր է (ԳԾԽ)**, քանի որ և՛ նպատակային ֆունկցիան, և՛ բոլոր սահմանափակումներն առաջին կարգի են (գծային են):

Նկատենք, որ քննարկված խնդրի լուծումը կախված չէ բնակավայրերի հեռավորության գործոնից: Այս խնդիրը կարելի էր լուծել նաև միայն դպրոց գնալու (և ոչ թե նաև հետ գալու) պայմանով, քանի որ այդ դեպքում, փաստորեն, կառուցված՝ $200x + 100(a - x) \rightarrow \min$ նպատակային ֆունկցիան ընդամենը բաժանվում է 2-ի, որի հետևանքով լավագույն լուծումը՝ $x = 0$, չի փոխվում, այլ միայն 2 անգամ փոքրանում է նպատակային ֆունկցիայի թվային արժեքը:

1.2.2. Գծային ծրագրավորման խնդրի տեսքերը

Դիտարկենք $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ փոփոխականներով հետևյալ խնդիրը.

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n \rightarrow \text{ext} , \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n (\leq; =; \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n (\leq; =; \geq) b_2 \\ \text{-----} \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n (\leq; =; \geq) b_i \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n (\leq; =; \geq) b_m \end{cases} , \quad (2)$$

$$x_j (\geq ; \sim ; \leq) 0, \quad j = \overline{1; n} : \quad (3)$$

(1)-ը կոչվում է **նպատակային ֆունկցիա**, (2)-ը՝ **հիմնական սահմանափակումների համակարգ**, իսկ (3)-ը՝ **յուրաքանչյուր փոփոխականի նկատմամբ կիրառվող սահմանափակումների համակարգ**: c_j - երը ($j = \overline{1; n}$) թվեր են և կոչվում են **նպատա-**

կային ֆունկցիայի գործակիցներ, a_{ij} -երը ($i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n}$)՝

հիմնական սահմանափակումների գործակիցներ, իսկ b_i -երը

($i = \overline{1; m}$)՝ **հիմնական սահմանափակումների ազատ անդամներ**:

(1)-ը, (2)-ը և (3)-ը գծային տեսքի են, այդ պատճառով էլ ունենք **ԳՕԽ**:

(1)-ի extremum-ը նշանակում է, որ փնտրվում է նպատակային ֆունկցիայի **կա՛մ maximum, կա՛մ minimum** արժեքը: (2) համակարգի յուրաքանչյուր սահմանափակում (պայման) կարող է հանդես գալ **հավասարման** կամ **ոչ խիստ անհավասարման** տեսքով, ընդ որում, եթե չի որոշակիացվում՝ խոսքը հավասարման թե ոչ խիստ անհավասարման մասին է, ապա դրանք կոչվում են **առնչություններ**:

(3) համակարգի յուրաքանչյուր պայման կարող է ցույց տալ, որ տվյալ փոփոխականը կա՛մ ոչ բացասական է, կա՛մ ոչ դրական, կամ էլ դրա նկատմամբ որևէ սահմանափակում չի կիրառվում ($x_j \sim 0$):

(1)–(3)-ը ընդհանուր տեսքով գծային ծրագրավորման խնդիր է (ԳԾԽ), քանի որ թույլատրվում են բոլոր հնարավոր տարբերակները՝ (1), (2) և (3)-ում:

Սահմանում: $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ վեկտորը կոչվում է ԳԾԽ **թույլատրելի լուծում** (պլան), եթե դրա բաղադրիչները բավարարում են խնդրի բոլոր սահմանափակումները՝ (2) և (3) համակարգերը:

Սահմանում: $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$ վեկտորը կոչվում է ԳԾԽ **լավագույն (օպտիմալ)** լուծում, եթե դրա բաղադրիչները բավարարում են խնդրի բոլոր սահմանափակումները, իսկ նպատակային ֆունկցիային հաղորդում են էքստրեմալ արժեք:

Բոլոր թույլատրելի լուծումները միասին կոչվում են խնդրի **թույլատրելի լուծումների** (պլանների) **բազմություն՝ ԹԼԲ:**

Այսպիսով՝ լուծել ԳԾԽ-ը նշանակում է բոլոր թույլատրելիներից ընտրել լավագույն լուծումը կամ լուծումները:

Լավագույն լուծման սահմանումից երևում է, որ այն անպայման պետք է լինի նաև թույլատրելի: Դա կարող է միակը չլինել, ինչպես նաև ընդհանրապես գոյություն չունենալ, ինչի պատճառները կքննարկվեն հետագայում:

Պարզվում է, որ ԳԾԽ-ը հնարավոր չէ լուծել մաթեմատիկական վերլուծության դասընթացներում շարադրված դիֆերենցիալ հաշվի հայտնի եղանակներով, քանի որ վերջիններս հնարավորություն են տալիս որոշելու նպատակային ֆունկցիայի միայն այն էքստրեմալ կետերը, որոնք ընկած են **որոշման տիրույթի** (ԹԼԲ-ի) ներսում, այլ ոչ թե եզրում: Բայց ԳԾԽ լավագույն լուծումը (լուծումները), որպես կանոն, ԹԼԲ եզրում է (տե՛ս էջ 38-39-ի օրինակը): Հետևաբար՝ ԳԾԽ հետազոտման և լուծման համար անհրաժեշտ են որակապես նոր եղանակներ:

Ներկայացնենք ԳԾԽ ընդհանուր տեսքը սեղմ ձևով.

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{ext}, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq ; = ; \geq) b_i, i = \overline{1; m}, \quad (2)$$

$$x_j (\geq ; \sim ; \leq) 0, j = \overline{1; n} : \quad (3)$$

Սահմանում: ԳԾԽ-ն **կանոնական տեսքով է**, եթե դրա (1) նպատակային ֆունկցիան մաքսիմումի տեսքով է, (2) համակարգի բոլոր սահմանափակումները հավասարումներ են, իսկ (3) համակարգի բոլոր անհայտները ոչ բացասական են:

Այսպիսով՝ ԳԾԽ-ն կանոնական տեսքով կլինի.

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i=\overline{1;m}, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1;n}: \quad (3)$$

Նկատենք, որ որոշ հեղինակներ չեն կիրառում (1) նպատակային ֆունկցիային հատկապես մաքսիմալ արժեք հաղորդող փոփոխականներ գտնելու պահանջը:

Սահմանում: ԳԾԽ-ն կոչվում է **սիմետրիկ** (ստանդարտ, սովորական) **տեսքի**, եթե դրա (2) համակարգի բոլոր սահմանափակումները միևնույն նշանի ոչ խիստ անհավասարումներ են, իսկ (3) համակարգում բոլոր փոփոխականները ոչ բացասական են:

Այսպիսով՝ ԳԾԽ-ն սիմետրիկ տեսքով կլինի.

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq / \geq) b_i, i=\overline{1;m}, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1;n}, \quad (3)$$

որտեղ $\leq / \geq$ պայմանական նշանակումը ցույց է տալիս, որ (2) համակարգի բոլոր սահմանափակումները կա՛ն $\geq$, կա՛ն $\leq$ տեսքով են: Նկատենք, որ եթե (2) համակարգի որոշ անհավասարումներ ցանկալի տեսքով չեն, ապա դրանք բազմապատկվում են (-1)-ով և բերվում ցանկալի տեսքի:

Ներկայացնենք ԳԾԽ կանոնական և սիմետրիկ տեսքերն ամենակարճ գրությամբ՝ վեկտորա-մատրիցային տեսքով.

Կանոնական տեսք

$$(\overline{C}, \overline{X}) \rightarrow \max,$$

$$A\overline{X} = \overline{B},$$

$$\overline{X} \geq 0:$$

Սիմետրիկ տեսք

$$(\overline{C}, \overline{X}) \rightarrow \max,$$

$$(\overline{C}, \overline{X}) \rightarrow \min,$$

$$\text{ա) } A\overline{X} \leq \overline{B},$$

$$\text{բ) } A\overline{X} \geq \overline{B},$$

$$\overline{X} \geq 0:$$

$$\overline{X} \geq 0:$$

Նշենք, որ սիմետրիկ տեսքի ա) տարբերակում իմաստալից է $(\overline{C}, \overline{X}) \rightarrow \max$, իսկ բ) տարբերակում՝ $(\overline{C}, \overline{X}) \rightarrow \min$ դեպքը:

1.2.3. ԳԾԽ հանգեցումը կանոնական տեսքի

Պարզվում է, որ կամայական տեսքի ԳԾԽ-ն միշտ կարելի է բերել ցանկացած այլ տեսքի, բայց առավել մեծ գործնական նշանակություն ունի տրվածից կանոնական տեսքի բերելը, քանի որ հետազոտման և լուծման եղանակները մշակված են հատկապես վերջինիս համար:

Այդ նպատակով պետք է կիրառել հետևյալ **ալգորիթը** (գործողությունների հաջորդականությունը)。

1. Նպատակային ֆունկցիա

- 1.1. Եթե նպատակային ֆունկցիան մաքսիմումի տեսքով է, ապա այն (-1) -ով չեն բազմապատկում:
- 1.2. Եթե նպատակային ֆունկցիան մինիմումի տեսքով է, ապա այն (-1) -ով են բազմապատկում:

2. Հիմնական սահմանափակումների համակարգ

- 2.1. Եթե հիմնական սահմանափակումների (2) համակարգում կան հավասարումներ, ապա դրանց ոչինչ չի գումարվում կամ դրանցից ոչինչ չի հանվում:
- 2.2. Եթե հիմնական սահմանափակումների (2) համակարգում կան ոչ խիստ անհավասարումներ, ապա դրանցից յուրաքանչյուրի փոքր կողմին գումարվում է (կամ մեծ կողմից հանվում է) մոր ներմուծված ոչ բացասական փոփոխական, որի միջոցով բոլոր ոչ խիստ անհավասարումները վերածվում են հավասարումների:

3. Փոփոխականների նկատմամբ կիրառվող սահմանափակումների համակարգ

- 3.1. Եթե տվյալ փոփոխականը ոչ բացասական է, ապա այն թողնվում է անփոփոխ:
- 3.2. Եթե տվյալ փոփոխականը ոչ դրական է, ապա ամենուրեք այն փոխարինվում է հակադիր փոփոխականով:
- 3.3. Եթե տվյալ փոփոխականը ազատ նշանի է ($x_j \sim 0$), ապա խնդրում ամենուրեք այն փոխարինվում է նոր ներմուծված երկու ոչ բացասական փոփոխականների տարբերությամբ:

Վերջին նշանակումը հնարավոր է, քանի որ յուրաքանչյուր փոփոխական կարելի է ներկայացնել ոչ բացասական երկու փոփոխականների տարբերությամբ (այն էլ՝ անվերջ թվով տարբերակներով):

Այսպիսով՝

1.2. $z \rightarrow \min$, ապա $-z \rightarrow \max$:

Նշանակելով՝ $-z = z'$, և, վերջապես, $z' \rightarrow \max$:

$$2.2. \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \text{ ներմուծենք } x_{n+1} \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i,$$

$$\text{կամ } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \text{ ներմուծենք } x_{n+2} \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+2} = b_i:$$

$$3.2. x_j \leq 0 \Rightarrow x_j = -z_j \leq 0 \Rightarrow z_j \geq 0:$$

$$3.3. x_j \sim 0 \Rightarrow x_j = u_j - v_j, \text{ որտեղ } u_j \geq 0 \text{ և } v_j \geq 0:$$

Ակնհայտ է, որ ցանկացած տեսքի ՊԾԽ միշտ էլ հնարավոր է բերել կանոնական տեսքի:

1.2.4. ՊԾԽ-ի հանգեցվող խնդիրների օրինակներ

Ներկայացնենք մի շարք խնդիրների օրինակներ, որոնք հանգեցվում են ՊԾԽ-ի՝ այդպիսով պատկերացում տալով վերջինիս կիրառելիության շրջանակների վերաբերյալ:

1. Ռեսուրսների ռացիոնալ օգտագործման խնդիր

Նախ՝ նշենք, որ այս խնդիրն ունի նաև մի շարք այլ անվանումներ. ռեսուրսների լավագույն ձևով օգտագործման, շահույթի, արտադրության պլանավորման, առավելագույն շահույթի, լավագույն տեսականու որոշման, շահութաբերության և այլն, ընդ որում, նախավերջին անվանումը ճշգրիտ չէ, իսկ վերջինը պարզապես սխալ

է: Խնդիրն առաջադրվում է արտադրական ձեռնարկության տեսակետից:

Ենթադրենք՝ կահույքի ֆաբրիկան կարող է արտադրել երեք տեսակի արտադրանք՝ աթոռ (Ա), բազկաթոռ (Բ) և գրասեղան (Գ): Արտադրության մեջ օգտագործվում են հումքի հետևյալ տեսակները՝ փայտ, գործվածք, սոսինձ և գամ, որոնց պաշարները հայտնի են և համապատասխանաբար՝ 200 մ³, 150 մ², 50 կգ և 28 կգ են: Հայտնի են նաև յուրաքանչյուր տեսակի արտադրանքի միավորի արտադրության համար անհրաժեշտ յուրաքանչյուր հումքի քանակը (այսպես կոչված՝ տեխնոլոգիական մատրիցը) և յուրաքանչյուր արտադրատեսակի միավորի իրացումից ստացվող շահույթը: Խնդրի բոլոր տվյալները ներկայացված են աղյուսակ 1.1-ում:

Պահանջվում է որոշել արտադրատեսակների թողարկման այնպիսի ծրագիր (որ արտադրատեսակից քանի հատ արտադրել)՝ ըստ որի ստացվելիք գումարային (լրիվ) շահույթը լինի առավելագույնը՝ հաշվի առնելով ներկայացված բոլոր հումքերի պաշարները, շահույթը միավորից և տեխնոլոգիական մատրիցը:

Աղյուսակ 1.1

Հումքի տեսակներ	Արտադրատեսակներ			Հումքի պաշարներ
	Ա	Բ	Գ	
Փայտ	0.3	0.6	1	200
Գործվածք	1	3	-	150
Սոսինձ	0.05	0.07	0.07	50
Գամ	0.03	0.04	0.1	28
Շահույթ՝ միավորից (դր.)	5000	8000	1000	

Նկատենք, որ տարբեր հումքերի՝ տարբեր չափման միավորներ ունենալը չի ազդում մոդելի կառուցման գործընթացի վրա: Շահույթը՝ միավորից համարվում է ամրագրված, այսինքն, նախապես կնքված պայմանագրի շնորհիվ այն անփոփոխ է:

Այս խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը կառուցելու համար x_1 -ով նշանակենք արտադրվելիք աթոռների, x_2 -ով՝ բազկաթոռների, իսկ x_3 -ով՝ գրասեղանների քանակը: Աղյուսակից երևում է, որ 1 աթոռ արտադրելու համար կծախսվի 0,3մ³ փայտ, հետևաբար՝ x_1 հատ աթոռ պատրաստելու համար փայտի ծախսը կկազմի 0,3 x_1 մ³: Նման ձևով Բ և Գ արտադրատեսակների x_2 և x_3 քանակություններ արտադրելու համար պահանջվող փայտի ծախսը կկազմի 0,6 x_2 մ³ և 1 x_3 մ³, ուստի դրա ընդհանուր ծախսն է՝ (0,3 x_1 + 0,6 x_2 + 1 x_3)մ³, որը չի կարող գերազանցել նախապես հայտնի պաշարի մե-

ծությունը: Բաժանելով այս անհավասարման երկու կողմն էլ չափողականության վրա (տվյալ դեպքում՝ մ³), կստանանք **սահմանափակում** ըստ առաջին հումքի տեսակի (փայտի)։

$$0,3x_1 + 0,6x_2 + 1x_3 \leq 200:$$

Նույնկերպ՝ հումքի մյուս տեսակների համար կունենանք հետևյալ **սահմանափակումները**։

$$x_1 + 3x_2 \leq 150,$$

$$0,05x_1 + 0,07x_2 + 0,07x_3 \leq 50,$$

$$0,03x_1 + 0,04x_2 + 0,1x_3 \leq 28:$$

Յուրաքանչյուր արտադրատեսակից հնարավոր չէ արտադրել բացասական քանակությամբ, հետևաբար՝ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$:

Սրանք փոփոխականների ոչ բացասական լինելու պայմաններն են: Այժմ կառուցենք խնդրի նպատակային ֆունկցիան: x_1 հատ աթոռի իրացումից ստացվող շահույթը կկազմի $5000x_1$ դրամ: Նման ձևով x_2 հատ բազկաթոռի իրացումից ստացվող շահույթը կլինի $8000x_2$, իսկ x_3 հատ գրասեղանից՝ $10\,000x_3$: Գումարային (լրիվ) շահույթը կկազմի $5000x_1 + 8000x_2 + 10\,000x_3$ դրամ, որն, ըստ խնդրի իմաստի, պետք է լինի հնարավորին չափ մեծ, այսինքն՝ նպատակային ֆունկցիան կունենա $5000x_1 + 8000x_2 + 10\,000x_3 \rightarrow \max$ տեսքը: Ի մի բերելով խնդրի նպատակային ֆունկցիան և բոլոր սահմանափակումները՝ կունենանք քննարկվող խնդրի հետևյալ **տնտեսամաթեմատիկական մոդելը**։

$$z = 5000x_1 + 8000x_2 + 10\,000x_3 \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\begin{cases} 0,3x_1 + 0,6x_2 + 1 \cdot x_3 \leq 200 \\ x_1 + 3x_2 \leq 150 \\ 0,05x_1 + 0,07x_2 + 0,07x_3 \leq 50 \\ 0,03x_1 + 0,04x_2 + 0,1x_3 \leq 28 \end{cases}, \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0: \quad (3)$$

Ստացվածը **ԳՃԽ** է՝ սիմետրիկ տեսքով:

Այժմ քննարկենք նույն խնդիրը տառային տեսքով, որի բոլոր տվյալները ներկայացված են աղյուսակ 1.2-ում:

Այստեղ կատարված են հետևյալ նշանակումները.

i – հումքերի տեսակների (տողերի) ինդեքս ($i = \overline{1; m}$),

j – արտադրատեսակների (սյուների) ինդեքս ($j = \overline{1; n}$),

b_i – i -րդ հունքի պաշար ($i = \overline{1; m}$),

c_j – j -րդ արտադրատեսակի միավորից ստացվող շահույթ ($j = \overline{1; n}$),

a_{ij} – i -րդ հունքի անհրաժեշտ ծախսն է j -րդ արտադրատեսակի միավորն արտադրելու համար ($i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n}$):

Աղյուսակ 1.2

Հունքի տեսակներ	Արտադրատեսակներ						Հունքի պաշարներ
	1	2	...	j	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...
i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Շահույթ՝ միավորից	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	

Նշանակենք x_j -ով ($j = \overline{1; n}$) j -րդ արտադրատեսակի անհայտ, արտադրվելիք քանակությունը և կառուցենք խնդրի **տնտեսամաթեմատիկական մոդելը**.

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1; m}, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1; n}: \quad (3)$$

Ստացվածը **ԳՃԽ** է, որի լուծման եղանակը կքննարկվի հետագայում:

$X = (0, 0, \dots, 0)$ զրոյական լուծումը թույլատրելի է, բայց ակնհայտորեն լավագույնը չէ, քանի որ շահույթ չի ստացվում: Ցանկացած օպտիմալ լուծման համար կարելի է պնդել, որ ռեսուրսներից զոհե մեկն ամբողջությամբ կսպառվի կամ, որ նույնն է, հիմնական

սահմանափակումների (2) համակարգի ոչ խիստ անհավասարումներից գոնե մեկը տեղի կունենա հավասարության տեսքով:

Դիտարկված և՛ թվային, և՛ տառային տեսքի խնդիրներում հնարավոր է նաև լրացուցիչ սահմանափակումների առկայություն. օրինակ՝ կարող է պահանջվել, որ աթոռ արտադրվի 100 հատից ոչ պակաս՝ $x_1 \geq 100$ կամ ծախսված գործվածքի մակերեսը լինի ամենաքիչը 80 մ², այսինքն՝ $x_1 + 3x_2 \geq 80$ և այլն:

II. Ցանքատարածությունների լավագույն օգտագործման խնդիր

Այս խնդիրն առաջադրվում է և լուծվում ագրոֆիրմայի կամ ֆերմերի տեսակետից: Նախ՝ քննարկենք դրա որոշակի թվային օրինակ: Ենթադրենք՝ կարելի է մշակել երեք **գյուղատնտեսական մշակաբույսեր** (ցորեն, գարի, եգիպտացորեն) երկու տարբեր հողակտորներում: Հայտնի է յուրաքանչյուր հողակտորի մակերեսը, յուրաքանչյուր մշակաբույսի միավորից (սովորաբար՝ 1 ցենտներից) հասույթը, ինչպես նաև յուրաքանչյուր գյուղատնտեսական մշակաբույսի բերքատվությունն առանձին հողակտորներում՝ հաշվի առնելով, որ վերջիններս կարող են ունենալ տարբեր ագրոտեխնիկական և այլ բնութագրեր: **Բերքատվություն** ասելով հասկանում ենք սեզոնի վերջում սպասվող բերքի միջին քանակությունը, եթե սեզոնի սկզբում տվյալ հողակտորի միավոր մակերեսի վրա մշակվի տվյալ գյուղատնտեսական մշակաբույսը: Այսպիսով՝ բերքատվությունն ամրագրված մեծություն չէ:

Հարկ է որոշել, թե որ հողակտորից որքան մակերես պետք է հատկացնել յուրաքանչյուր գյուղատնտեսական մշակաբույսի մշակմանը, որպեսզի ստացված ամբողջ բերքն իրացնելուց հետո հասույթը լինի առավելագույնը: Նկատենք, որ այս խնդրում ևս, ինչպես նախորդում, գնային անորոշություն չկա. բոլոր մշակաբույսերի միավորից հասույթները համարվում են ամրագրված, այսինքն, նախապես կնքված պայմանագրերի շնորհիվ, դրանք արդեն հայտնի են սեզոնի սկզբում և անփոփոխ են: Թվային օրինակի բոլոր տվյալները ներկայացված են աղյուսակ 1.3-ում:

Աղյուսակ 1.3

Հողակտորներ	Գյուղատնտեսական մշակաբույսեր			Մակերես
	Ցորեն	Գարի	Եգիպտացորեն	
1	20	20	25	100 հա
2	23	18	22	150 հա
Հասույթ՝ միավորից (դր.)	300	200	250	

Կազմենք այս խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը՝ նշանակելով x_{ij} -ով ($i=1,2$; $j=1, 2, 3$) i -րդ հողակտորի մակերեսի այն մասը, որի վրա մշակվելու է j -րդ մշակաբույսը: Ակնհայտ է, որ $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$, այսինքն՝ երեք գյուղատնտեսական մշակաբույսերին հատկացված մակերեսների գումարն առաջին հողակտորի վրա չի կարող ավելին լինել, քան այդ հողակտորի մակերեսն է: Նման ձևով, ըստ երկրորդ հողակտորի, սահմանափակումը կլինի՝ $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150$:

Յուրաքանչյուր գյուղատնտեսական մշակաբույսին հատկացված մակերեսն ամեն մի հողակտորում չի կարող բացասական լինել՝ $x_j \geq 0$: Այժմ կառուցենք խնդրի նպատակային ֆունկցիան:

Առաջին հողակտորի x_{11} մակերեսից սպասվում է $20x_{11}$, իսկ երկրորդ հողակտորի x_{21} մակերեսից՝ $23x_{21}$ ցենտներ ցորեն, ուստի սպասվող ցորենի ամբողջ քանակը ($20x_{11} + 23x_{21}$) ցենտներ է:

Նման ձևով՝ գարու ամբողջ սպասվող քանակը ($20x_{12} + 18x_{22}$), իսկ եգիպտացորենինը՝ ($25x_{13} + 22x_{23}$) ցենտներ է:

Ամբողջ ցորենի իրացումից սպասվող հասույթը կարտահայտվի՝ $300(20x_{11} + 23x_{21})$, գարու իրացումից՝ $200(20x_{12} + 18x_{22})$, իսկ եգիպտացորենի իրացումից՝ $250(25x_{13} + 22x_{23})$ տեսքով: Բնական է ձգտել, որ ամբողջ հասույթը լինի հնարավորին չափ մեծ, այսինքն՝ նպատակային ֆունկցիան և կունենա (1), իսկ խնդրի **տնտեսամաթեմատիկական մոդելը**՝ (1)–(3) տեսքը.

$$z = 300(20x_{11} + 23x_{21}) + 200(20x_{12} + 18x_{22}) + 250(25x_{13} + 22x_{23}) \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150 \end{cases}, \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2, \quad j=1,2,3: \quad (3)$$

Հնարավոր է, որ խնդրում լինեն նաև **լրացուցիչ** սահմանափակումներ: Ձևակերպենք դրանցից մի քանիսը՝ ներկայացնելով մաթեմատիկական համարժեքները.

1) առաջին հողակտորում պետք է ցորեն մշակվի ոչ ավելի, քան 50 հա-ի վրա՝ $x_{11} \leq 50$,

- 2) երկրորդ հողակտորում պետք է եգիպտացորեն մշակվի ոչ պակաս, քան 40 հա-ի վրա՝ $x_{23} \geq 40$,
- 3) առաջին և երկրորդ հողակտորներում պետք է գարի մշակվի ոչ ավելի, քան 60 հա-ի վրա՝ $x_{12} + x_{22} \leq 60$,
- 4) առաջին հողակտորից ցորենի սպասվող բերքը պետք է ավելին չլինի 1000 ցենտներից՝ $20x_{11} \geq 1000$ (նկատենք, որ սա համարժեք է 1) սահմանափակմանը),
- 5) գարու սպասվող լրիվ բերքը պետք է լինի 600 ցենտների՝ $20x_{12} + 18x_{22} = 600$,
- 6) եգիպտացորենի սպասվող լրիվ բերքը պետք է պակաս չլինի 700 ցենտներից՝ $25x_{13} + 22x_{23} \geq 700$,
- 7) ցորենի սպասվող լրիվ բերքը պետք է լինի 800–1200 ցենտների սահմաններում՝ $800 \leq 20x_{11} + 23x_{21} \leq 1200$,
- 8) գարու սպասվող լրիվ բերքը պետք է լինի 5000 ցենտներից ոչ պակաս՝ $20x_{12} + 18x_{22} \geq 5000$:

Ակնհայտ է, որ վերջին պահանջը հնարավոր չէ իրագործել, քանի որ նույնիսկ երկու հողակտորում ամբողջությամբ միայն գարի մշակելու դեպքում այդ մշակաբույսի սպասվող լրիվ բերքը կկազմի՝ $20 \cdot 100 + 18 \cdot 150 = 2000 + 2700 = 4700 < 5000$:

Թեկուզ մեկ այսպիսի անիրագործելի պահանջի դեպքում խնդիրը լուծում չի ունենա, քանի որ դրա սահմանափակումները կլինեն **անհամատեղելի**, այսինքն՝ **ԹԼԲ-ն կլինի դատարկ**:

Այժմ ներկայացնենք նույն խնդիրն ընդհանուր տեսքով: Դրա համար կատարենք հետևյալ նշանակումները.

i – հողակտորների ինդեքս ($i = \overline{1; m}$),

j – գյուղատնտեսական մշակաբույսերի ինդեքս ($j = \overline{1; n}$),

S_i – i -րդ հողակտորի մակերես ($i = \overline{1; m}$),

C_j – j -րդ մշակաբույսի միավորից հասույթ ($j = \overline{1; n}$),

a_{ij} – i -րդ հողակտորում j -րդ գյուղատնտեսական մշակաբույսի բերքատվություն ($i = \overline{1; m}$, $j = \overline{1; n}$),

x_{ij} – i -րդ հողակտորի մակերեսի մաս, որ հատկացվելու է j -րդ մշակաբույսին ($i = \overline{1; m}$, $j = \overline{1; n}$):

Այս տառային տեսքով խնդրի բոլոր տվյալները ներկայացված են աղյուսակ 1.4-ում:

Աղյուսակ 1.4

Հողակտորներ	Գյուղատնտեսական մշակաբույսեր						Մակերես
	1	2	...	j	...	n	
1	a ₁₁	a ₁₂	...	a _{1j}	...	a _{1n}	S ₁
2	a ₂₁	a ₂₂	...	a _{2j}	...	a _{2n}	S ₂
...	...	...	...	...	...	...	...
i	a _{i1}	a _{i2}	...	a _{ij}	...	a _{in}	S _i
...	...	...	...	...	...	...	...
m	a _{m1}	a _{m2}	...	a _{mj}	...	a _{mn}	S _m
Հասույթ՝ մշակաբույսի միավորից	C ₁	C ₂	...	C _j	...	C _n	

Սահմանափակումներն ըստ հողակտորների կլինեն.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq S_i, i = \overline{1; m} :$$

Մակերեսների ոչ բացասական լինելու պայմաններն են՝
 $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n} :$

Նպատակային ֆունկցիան կծնավորվի առանձին գյուղատնտեսական մշակաբույսերի $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}$ քանակությունների և դրանց միավորից c_j հասույթի արտադրյալների գումարից՝
 $\sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}$ տեսքով: Այսպիսով՝ ցանքատարածությունների լավագույն ձևով օգտագործման խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելն է.

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} x_{ij} \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq S_i, i = \overline{1; m}, \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n} : \quad (3)$$

Ստացվածը **ԳԾԽ** է՝ սիմետրիկ տեսքով:

Ինչպես ռեսուրսների լավագույն օգտագործման խնդրում, այստեղ ևս զրոյական լուծումը թույլատրելի է, բայց լավագույնը չէ, քանի որ հասույթ չի ստացվում: Ցանկացած օպտիմալ լուծման համար կարելի է պնդել, որ բոլոր հողակտորների ամբողջ մակերեսները

ընդ պետք է լրիվ օգտագործվեն կամ, որ նույնն է, հիմնական սահմանափակումների (2) համակարգի բոլոր ոչ խիստ անհավասարումները տեղի կունենան հավասարությունների տեսքով: Պարզ է, որ այս խնդրի օպտիմալ լուծումը որոշելու համար հիմնական սահմանափակումների (2) համակարգի բոլոր առնչությունները կարելի է ներկայացնել հավասարումներով՝ ստանալով **ԳԾԽ**՝ կանոնական տեսքով:

III. Նորմալ սննդի (դիետի) խնդիր

Ինչպես հայտնի է, մարդն իր առողջությունն ու աշխատունակությունը պահպանելու համար ժամանակի որոշակի միավորի ընթացքում (օր, ամիս, տարի) պետք է սննդի միջոցով ընդունի որոշակի քանակությամբ **սննդանյութեր** (օրինակ՝ սպիտակուցներ, ծարպեր, ածխաջրեր և այլն), ինչի համար օգտագործելու է մի շարք **սննդամթերքներ**: Վերջիններս պայմանականորեն խմբավորենք ըստ մեծ ենթաբաժինների՝ հացամթերք, մսամթերք, կաթնամթերք, պտուղ և բանջարեղեն (հասկանալի է, որ այս ցուցակը չի կարող հավակնել ամբողջականության): Աղյուսակ 1.5-ը ներկայացնում է յուրաքանչյուր ենթաբաժնի սննդամթերքի միջին կշռված գինը, յուրաքանչյուր սննդանյութի՝ տվյալ ժամանակահատվածի ընթացքում օգտագործվելիք թույլատրելի նվազագույն և առավելագույն քանակությունները մեկ չափահաս մարդու հաշվով, ինչպես նաև յուրաքանչյուր սննդամթերքի միավորի մեջ ամեն մի սննդանյութի պարունակությունը:

Պահանջվում է որոշել, թե որ սննդամթերքից ինչ քանակությամբ է նպատակահարմար ձեռք բերել և օգտագործել (կամ որոշել օրապահիկի ռացիոնալ կառուցվածքը), որպեսզի նվազագույն դրամական ծախսերով ապահովվի օրգանիզմի բնականոն կենսագործունեությունը, այսինքն՝ յուրաքանչյուր սննդանյութից սպառվի տրված նորմայի սահմաններում:

Աղյուսակ 1.5

<i>Սննդանյութեր, կալորիաներ</i>	<i>Սննդամթերքներ</i>				<i>Միջին օրական նորմա</i>	
	<i>Հացամթերք</i>	<i>Մսամթերք</i>	<i>Կաթնամթերք</i>	<i>Պտուղ և բանջարեղեն</i>	<i>min</i>	<i>max</i>
Սպիտակուցներ	100	270	35	5	70	100
Ծարպեր	30	250	35	5	60	70
Ածխաջրեր	300	150	50	120	150	170
Կիլոկալորիաներ	2500	3470	675	400	2900	3300
Սննդամթերքի գին (դր.)	300	1400	300	220		

խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը կառուցելու համար նշանակենք, համապատասխանաբար, x_1 -ով, x_2 -ով, x_3 -ով և x_4 -ով հացամթերքի, մսամթերքի, կաթնամթերքի, պտուղբանջարեղենի ձեռքբերվելիք անհայտ քանակությունները: Հացամթերքի միջոցով օրգանիզմ մուտք գործած սպիտակուցների քանակությունը կկազմի $100x_1$, մսամթերքի միջոցով՝ $270x_2$, կաթնամթերքի միջոցով՝ $35x_3$ և, վերջապես, պտուղբանջարեղենի միջոցով՝ $5 \cdot x_4$ գրամ, հետևաբար՝ օրգանիզմի ստացած սպիտակուցի լրիվ քանակությունն է՝

$$100x_1 + 270x_2 + 35x_3 + 5 \cdot x_4 :$$

Պետք է նկատել, որ խնդրում չեն տարբերակվում կենդանական և բուսական ծագման սպիտակուցները, այլ միայն պահանջվում է ամբողջ սպիտակուցի քանակության որոշակի սահմաններում գտնվելը՝ $70 \leq 100x_1 + 270x_2 + 35x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 100$:

Նույնկերպ կառուցվում են նաև սահմանափակումներն ըստ ճարպերի, ածխաջրերի և կալորիաների.

$$60 \leq 30x_1 + 150x_2 + 35x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 70,$$

$$150 \leq 300x_1 + 150x_2 + 50x_3 + 120x_4 \leq 170,$$

$$2900 \leq 2500x_1 + 3470x_2 + 675x_3 + 400x_4 \leq 3300:$$

Բացի այդ, ըստ x_1 , x_2 , x_3 և x_4 անհայտների իմաստի, դրանք բոլորը պետք է լինեն ոչ բացասական՝ $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, այլ կերպ ասած, բացասական սպառում հնարավոր չէ, իսկ եթե որևէ j -րդ սննդամթերք չի սպառվում, ապա $x_j = 0$:

Կառուցենք խնդրի նպատակային ֆունկցիան: Հացամթերքի x_1 քանակ ձեռք բերելու համար կծախսվի $300 x_1$, մսամթերքի x_2 քանակ՝ $1400 x_2$, կաթնամթերքի x_3 քանակ՝ $300 x_3$ և, վերջապես, պտուղբանջարեղենի x_4 քանակ՝ $220 x_4$ գումար: Դրանք բոլորը դրամական ծախսեր են, հետևաբար՝ սննդամթերքի ձեռքբերման լրիվ ծախսն է՝ $300x_1 + 1400x_2 + 300x_3 + 220x_4$, որը պետք է լինի հնարավորին չափ քիչ, ուստի խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը կլինի.

$$z = 300x_1 + 1400x_2 + 300x_3 + 220x_4 \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\begin{cases} 70 \leq 100x_1 + 270x_2 + 35x_3 + 5x_4 \leq 100 \\ 60 \leq 300x_1 + 150x_2 + 35x_3 + 5x_4 \leq 70 \\ 150 \leq 300x_1 + 150x_2 + 50x_3 + 120x_4 \leq 170 \\ 2900 \leq 2500x_1 + 3470x_2 + 675x_3 + 400x_4 \leq 3300 \end{cases}, \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 : \quad (3)$$

Ստացված խնդիրը **ԳԾԽ** է:

Այժմ քննարկենք նույն խնդիրն ընդհանուր տեսքով, որի տվյալները ներկայացված են աղյուսակ 1.6-ում.

Աղյուսակ 1.6

Սննդա- նյութեր	Սննդամթերքներ						Օրական միջին նորմա	
	1	2	...	...	...	n	min	max
1	a_{12}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	$\underline{b}_1$	$\overline{b}_1$
2	a_{12}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	$\underline{b}_2$	$\overline{b}_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	$\underline{b}_i$	$\overline{b}_i$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	$\underline{b}_m$	$\overline{b}_m$
Սննդամթերքի գին (դր.)	C_1	C_2	...	C_j	...	C_n		

Աղյուսակ 1.6-ում կատարված են հետևյալ նշանակումները.

i – սննդանյութերի ինդեքս ($i = \overline{1; m}$),

j – սննդամթերքների ինդեքս ($j = \overline{1; n}$),

C_j – j -րդ սննդամթերքի գին ($j = \overline{1; n}$),

$\underline{b}_i$ – i -րդ սննդանյութի անհրաժեշտ նվազագույն քանակ

որոշակի ժամկետում ($i = \overline{1; m}$),

$\overline{b}_i$ – i -րդ սննդանյութի թույլատրելի առավելագույն քանակ

որոշակի ժամկետում ($j = \overline{1; n}$)

a_{ij} – i -րդ սննդանյութի պարունակություն j -րդ սննդամթերքի

միավորի մեջ ($i = \overline{1;m}, j = \overline{1;n}$),

x_j – j -րդ սննդամթերքի ձեռքբերվելիք անհայտ քանակություն ($j = \overline{1;n}$):

Սահմանափակումներն ըստ սննդանյութերի կլինեն.

$$\underline{b_i} \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \overline{b_i}, \quad i = \overline{1;m} :$$

Սննդամթերքների սպառվող քանակությունների ոչ բացասականության պայմանները կլինեն՝ $x_j \geq 0, j = \overline{1;n}$, իսկ ծախսված

լրիվ գումարը կներկայացվի՝ $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ տեսքով: Այսպիսով, հաշվի

առնելով նաև խնդրի նպատակը, կստանանք դրա **տնտեսամաթեմատիկական մոդելը**.

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\underline{b_i} \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \overline{b_i}, \quad i = \overline{1;m}, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1;n} : \quad (3)$$

Ստացված խնդիրը նույնպես **ԳՃԽ** է:

$X = (0, 0, \dots, 0)$ զրոյական լուծումն այս խնդրում թույլատրելի չէ, քանի որ բավարարված չեն լինի հիմնական սահմանափակումների (2) համակարգի բոլոր կրկնակի, ոչ խիստ անհավասարումների ձախմասները: Ցանկացած օպտիմալ լուծման համար կարելի է պնդել, որ միջին օրական նվազագույն նորմաներից գոնե մեկը կբավարարվի ճշգրտորեն կամ, որ նույնն է, հիմնական սահմանափակումների (2) համակարգի կրկնակի, ոչ խիստ անհավասարումներից գոնե մեկի ձախ մասը տեղի կունենա հավասարության տեսքով:

1.2.5. **ԳԾԽ լավագույն լուծման գոյության և հիմնական թեորեմները**

ԳԾԽ լավագույն լուծման գոյության թեորեմը կրճատ կոչվում է նաև **ԳԾԽ գոյության թեորեմ**: Մինչև ԳԾԽ լուծմանն անցնելը նախ՝ ցանկալի և նպատակահարմար է պարզել, թե արդյոք տրված խնդիրը օպտիմալ լուծում ունի, թե ոչ: Այս հարցի բացասական պատասխանը կօգնի ջանք խնայել և իզուր ժամանակ չծախսել գոյություն չունեցող լուծումը փնտրելու համար:

ԳԾԽ գոյության թեորեմը ցույց է տալիս, թե ինչ պայմանների առկայության դեպքում խնդիրը լուծում կունենա:

Թեորեմ: Որպեսզի մաքսիմումի պահանջով ԳԾԽ-ն ունենա լավագույն լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ խնդրի ԹԼԲ-ն դատարկ չլինի, իսկ նպատակային ֆունկցիան ԹԼԲ-ի վրա վերևից լինի սահմանափակ:

Ինքնուրույն ձևակերպեք թեորեմը մինիմումի պահանջով ԳԾԽ-ի համար:

Եթե թեորեմի պայմաններից որևէ մեկը խախտված է, ապա ԳԾԽ-ն լավագույն լուծում չի ունենա: Ակնհայտ է, որ թեորեմի երկու պայմանները միաժամանակ խախտվել չեն կարող:

ԳԾԽ ԹԼԲ-ն կարող է՝ ա) լինել դատարկ բազմություն, բ) հանդիսանալ միակ կետ, գ) պարունակել անվերջ թվով կետեր:

ա) դեպքում խնդիրը լուծում չունի:

բ) դեպքում հենց այդ միակ կետը լավագույն լուծումն է, ընդ որում, այն միաժամանակ և՛ մաքսիմումի, և՛ մինիմումի կետ է՝ համաձայն դրանց սահմանումների:

գ) դեպքում խնդիրն իմաստալից է, քանի որ կան լավագույն լուծման ընտրության տարբերակներ:

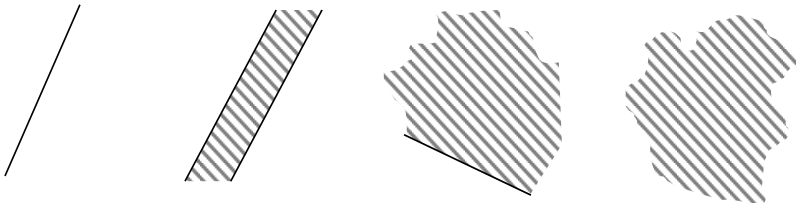
ԳԾԽ լուծելիս առաջանում են հետևյալ հաջորդական հարցերը.

- խնդիրն ունի՞ թույլատրելի լուծումներ,
- խնդիրն ունի՞ լավագույն լուծում (լուծումներ),
- ինչպե՞ս գտնել լավագույն լուծումները (կամ դրանցից գոնե մեկը):

Այս հարցերի հետազոտումը կարելի է իրականացնել մի թվալին մեթոդով, որը կոչվում է **սիմպլեքս ալգորիթ** (անգլերեն՝ simple՝ պարզ, հասարակ): Դրա հիմքում գծային խնդիրների վերլուծության համար կարևորագույն նշանակություն ունեցող **ԳԾԽ հիմնական թեորեմն է**. Եթե **ԳԾԽ-ն ունի լավագույն լուծում**, ապա դրա **ԹԼԲ զագաթներից գոնե մեկը լավագույն լուծում է**:

Այսպիսով, ենթադրենք՝ ըստ ԳԾԽ գոյության թեորեմի պարզել ենք, որ խնդիրը լավագույն լուծում կամ լուծումներ ունի: Ինչպե՞ս գտնել այդ լուծումը (լուծումները): **ԳԾԽ հիմնական թեորեմը** կիրառելով, կարելի է զգալիորեն նվազեցնել այն կետերի բազմությունը, որը պետք է հետազոտել օպտիմալ լուծում փնտրելիս:

Ակնհայտ է, որ այս թեորեմը կիրառելի է բոլոր այն դեպքերում, եթե ԹԼԲ-ն ունի գոնե մեկ զագաթ: **Գագաթների բացակայության դեպքում** (օրինակ՝ ուղիղ, անսահմանափակ շերտ, կիսահարթություն, հարթություն և այլն (գծապատկեր 1.27)) թեև ԳԾԽ հիմնական թեորեմը կիրառել հնարավոր չէ, բայց խնդրի վերլուծությունն առանց դժվարության իրականացվում է **գրադիենտի** (ուղղորդ վեկտորի) միջոցով:



ա) ուղիղ բ) անսահմանափակ շերտ գ) կիսահարթություն դ) հարթություն

Գծապատկեր 1.27

Կարող է թվալ, թե, օգտվելով ԳԾԽ հիմնական թեորեմից, խնդիրը կարելի է լուծել հետևյալ կերպ. գտնել ԹԼԲ վերջավոր թվով բոլոր զագաթները և, տեղադրելով դրանց կոորդինատները նպատակային ֆունկցիայի մեջ, հաշվել արժեքներն ու ընտրել դրանցից լավագույնը (այս եղանակը կոչվում է **հատարկում**):

ԳԾԽ լուծման այս եղանակը գործնականում անիրագործելի է, քանի որ զագաթների քանակը կարող է չափազանց մեծ լինել, ընդ որում, յուրաքանչյուր զագաթի կոորդինատների որոշումը պահանջում է հաշվային աշխատանքի զգալի ծավալ:

Մինչդեռ սիմպլեքս ալգորիթմը հնարավորություն է տալիս նպատակասլաց կերպով նվազեցնելու դիտարկվող զագաթների քանակը՝ յուրաքանչյուր քայլում անցնելով առավել նախընտրելի լուծման, կուրորեն չհամեմատելով նպատակային ֆունկցիայի արժեքները բոլոր զագաթներում:

Այսպիսով՝ բազմանիստային բազմության զագաթները ԳԾԽ հետազոտման և լուծման հարցում կարևորագույն դեր են խաղում:

Նշենք նաև, որ եթե ԳԾԽ-ում ավելացվի **լրացուցիչ սահմանափակում** (պայման), ապա խնդրի նպատակային ֆունկցիայի

բացարձակ մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը չի կարող աճել (նվազել), եթե, իհարկե, այդ բացարձակ էքստրեմալ արժեքը գոյություն ունի և՛ մինչև նշված ավելացումը, և՛ դրանից հետո:

Եթե Q -ից **հեռացվի** որևէ սահմանափակում, ապա դրա նպատակային ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը չի կարող փոքրանալ (մեծանալ), եթե, իհարկե, ստացված խնդրում նպատակային ֆունկցիայի բացարձակ մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը հասանելի է:

Եթե ոչ դատարկ Θ -ով Q -ի նպատակային ֆունկցիայի բացարձակ էքստրեմալ արժեքը հասանելի չէ, ուրեմն՝ այդ Q -ի Θ -ն անսահմանափակ բազմություն է: Հակադարձը պնդել հնարավոր չէ:

1.2.6. Q -ի գրաֆիկական լուծումը

Պարզագույն դեպքերում, երբ Q -ն պարունակում է միայն մեկ կամ երկու փոփոխական, հնարավոր է տալ այդպիսի խնդրի երկրաչափական մեկնաբանությունը և լուծել դա գրաֆիկորեն: Ճիշտ է, նշված դեպքերը գործնականում քիչ են հանդիպում, բայց դրանց վերլուծությունը էական է Q -ի մի շարք կարևոր հատկություններ բացահայտելու և ներկայացնելու տեսակետից:

Նախ՝ քննարկենք միայն մեկ փոփոխականով ($n=1$) Q -ի-ն:

$$Z = c_1 x_1 \rightarrow \text{ext}, \quad (1)$$

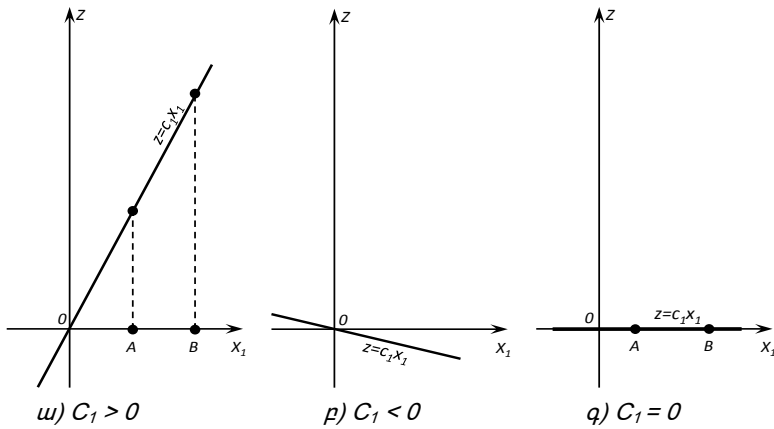
$$a_{i1} x_1 (\leq; =; \geq) b_i, \quad i = \overline{1; m}, \quad (2)$$

$$x_j (\geq; \sim; \leq) 0: \quad (3)$$

Հարթության վրա տեղադրենք **դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը**՝ X_1 հորիզոնական և ուղղահայաց Z առանցքներով:

Ակնհայտ է, որ այս խնդրի Θ -ն կարող է լինել՝ ա) դատարկ բազմություն, բ) կետ, գ) հատված, դ) ճառագայթ, ե) ուղիղ, իսկ (1) նպատակային ֆունկցիայի գրաֆիկն ուղիղ գիծ է (գծապատկեր 1.28):

$n = 1$ դեպքում, կախված Θ -ից, լավագույն լուծումը կարող է լինել կետ, հատված, ճառագայթ, ուղիղ, ինչպես նաև կարող է գոյություն չունենալ:



Գծապատկեր 1.28

$n = 1$ դեպքում բոլոր հնարավոր 9 դեպքը ներկայացված է աղյուսակ 1.7-ում:

Աղյուսակ 1.7-ը կառուցված է հետևյալ սկզբունքով. տրված ԹԼԲ-ի դեպքում բերված են օպտիմալ լուծման բոլոր հնարավոր տարբերակները, ընդ որում, « + »-ը նշանակում է, որ այդ դեպքը հնարավոր է, « - »-ը՝ այդ դեպքը հնարավոր չէ, իսկ « ++ »-ը՝ այդ դեպքը տեղի է ունենում հաստատապես:

Աղյուսակ 1.7

ԹԼԲ \ Օպտիմալ լուծում	Գոյություն չունի	Կետ	Հատված	Ճառագայթ	Ուղիղ
$\emptyset$	++	-	-	-	-
Կետ	-	++	-	-	-
Հատված	-	+	+	-	-
Ճառագայթ	+	+	-	+	-
Ուղիղ	+	-	-	-	+

Օրինակ՝ եթե գծապատկեր 1.28-ի ա) $C_1 > 0$ դեպքում ԹԼԲ-ն AB հատվածն է, ապա A-ն մինիմումի կետ է, իսկ B-ն՝ մաքսիմումի, իսկ եթե ԹԼԲ-ն A սկզբնակետով և դեպի աջ ուղղված ճառագայթ է, ապա մաքսիմումի կետ չկա **նպատակային ֆունկցիայի վերևից անսահմանափակ լինելու պատճառով**, իսկ A-ն մինիմումի կետ

է: AB հատվածի բոլոր կետերը գ) դեպքում և՛ մաքսիմումի, և՛ մինիմումի կետեր են:

Այսպիսով՝ եզրակացնում ենք, որ մեկ փոփոխականով **ԳԾԽ-ն լավագույն լուծում կունենա, եթե դրա ԹԼԲ-ն դատարկ չէ, և այդ բազմության վրա նպատակային ֆունկցիան սահմանափակ է էքստրեմումի փնտրման ուղղությամբ՝** ըստ ԳԾԽ գոյության թեորեմի:

Այժմ քննարկենք երկու փոփոխականով՝ ($n=2$) ԳԾԽ-ն:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \text{ext}, \quad (1)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 (\leq; =; \geq) b_i, \quad i = \overline{1;m}, \quad (2)$$

$$x_1 (\geq; \sim; \leq) 0, \quad x_2 (\geq; \sim; \leq) 0: \quad (3)$$

Խնդրի ԹԼԲ-ն կառուցելու համար օգտագործենք **կոորդինատների դեկարտյան ուղղանկյուն համակարգը՝** հորիզոնական x_1 և ուղղահայաց x_2 առանցքներով, իսկ OZ առանցքը՝ ուղղահայաց

$X_1 O X_2$ հարթությանը:

Այս խնդրի ԹԼԲ-ն կարող է լինել. ա) դատարկ բազմություն, բ) կետ, գ) հատված, դ) ճառագայթ, ե) ուղիղ, զ) բազմանկյուն, է) անսահմանափակ բազմանկյունային բազմություն, իսկ Z նպատակային ֆունկցիան որոշակի հարթության մաս է, բայց արդեն $X_1 O X_2$ հարթությունից դուրս, ընդ որում, դրա պրոյեկցիան $X_1 O X_2$ հարթության վրա խնդրի ԹԼԲ-ն է:

$n = 2$ դեպքում ԳԾԽ յուրաքանչյուր սահմանափակում կարող է լինել կա՛մ հավասարում, կա՛մ ոչ խիստ անհավասարում, ընդ որում, **հավասարմանը գրաֆիկորեն համապատասխանում է ուղիղ, իսկ ոչ խիստ անհավասարմանը՝ փակ կիսահարթություն:** Առաջին դեպքում պետք է կառուցել ուղղի գրաֆիկը որևէ եղանակով, օրինակ՝ առանցքների հետ դրա հատման կետերը գտնելու և ուղիղ գծով դրանք միացնելու միջոցով: Երկրորդ դեպքում փակ կիսահարթության կառուցման համար նախ՝ պետք է կառուցել դրա **եզրը** համապատասխան ուղղի միջոցով՝ առաջին դեպքի նմանությամբ: Այնուհետև առաջացած երկու կիսահարթություններից հարկ է ընտրել այն, որը բավարարում է անհավասարումը: Դրա համար բավական է այդ կիսահարթությունների ընդհանուր **եզրին չպատկանող** ցանկացած կետի կոորդինատները տեղադրել տրված անհավասարման մեջ. եթե ստացվում է ճիշտ արտահայտություն, ապա որոնվող կիսահարթությունն այն է, որին պատկանում է կետը, իսկ եթե ստացվում է սխալ արտահայտություն, ապա որոնվողը մյուս կիսահարթությունն է: Ակնհայտ է, որ կարևոր

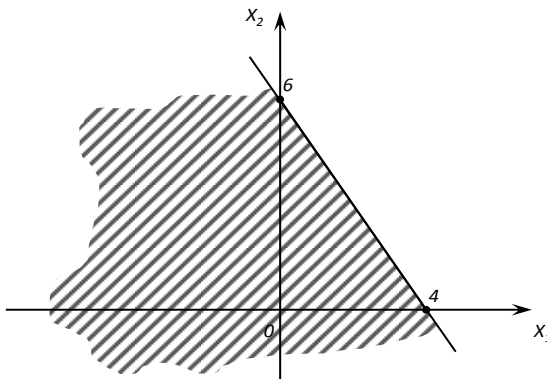
չէ, թե ստուգիչ կետը որ կիսահարթությունում կգտնվի, միևնույնն է, կընտրվի ոչ խիստ անհավասարմանը բավարարող փակ կիսահարթությունը:

Միակ անհարմարությունը, որ կարող է առաջանալ լուծման այս եղանակը կիրառելիս, այն է, որ եզրագծի՝ կոորդինատների սկզբնակետով անցնելու դեպքում առանցքների հետ հատման երկու կետ չի ստացվում, բայց այստեղ կարելի է կիրառել ուղղի գրաֆիկի կառուցման այլ եղանակ, օրինակ՝ x_1 -ին 0-ից տարբեր որոշակի արժեք տալու միջոցով գտնել x_2 -ի համապատասխան արժեքը, այնուհետև ուղղի գրաֆիկը տանել $(0,0)$ և (x_1, x_2) կետերով:

Այսպես՝ գրաֆիկորեն պատկերենք $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ անհավասարման լուծումների բազմությունը հանդիսացող փակ կիսահարթությունը:

Նախ՝ կառուցենք $3x_1 + 2x_2 = 12$ ուղղի գրաֆիկն առանցքների հետ դրա հատման կետերը որոշելու միջոցով. $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6$, հետևաբար՝ դա անցնում է $(0,6)$ կետով: Նման ձևով՝ $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$, ուստի ուղիղն անցնում է նաև $(4,0)$ կետով: Այս երկու կետով անցնում է ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:

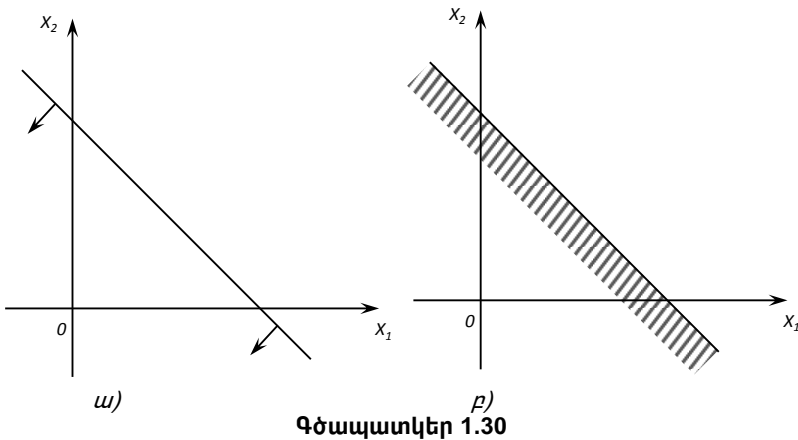
Եզրագիծը կառուցելուց հետո պետք է որոշել փնտրվող փակ կիսահարթությունը (գծապատկեր 1.29): Հարմար է տեղադրել $(0,0)$ սկզբնակետի կոորդինատները $3x_1 + 2x_2 \leq 12$ անհավասարման մեջ՝ $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 12$ կամ $0 \leq 12$: Ստացվեց ճիշտ արտահայտություն, ուստի փնտրվող փակ կիսահարթությունը կլինի այն, որին պատկանում է $(0,0)$ կետը (նրբագծված է):



Գծապատկեր 1.29

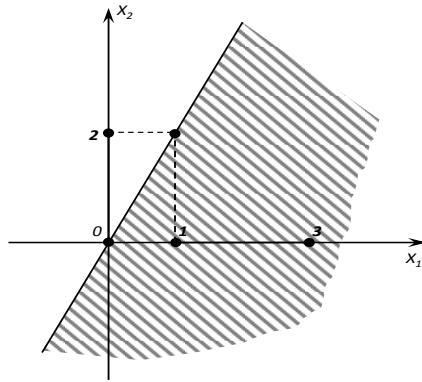
Գործնականում դա հարմար է ներկայացնել ավելի սեղմ կերպով (գծապատկեր 1.30), որտեղ դա ցուցադրված է ա) կամ բ) ձևով, քանի որ, սովորաբար, նույն խնդրում լինում են մասնաշաղկապներ, ուստի նպատակահարմար է գծագիրը շատ չծանրաբեռնել:

Եթե անհավասարման ազատ անդամը 0 է, ապա ուղղի գրաֆիկի կառուցման՝ վերը նշված եղանակը կիրառել հնարավոր չէ, քանի որ գրաֆիկը կանցնի կոորդինատների $(0,0)$ սկզբնակետով: Օրինակ՝ $-4x_1 + 2x_2 \leq 0$:



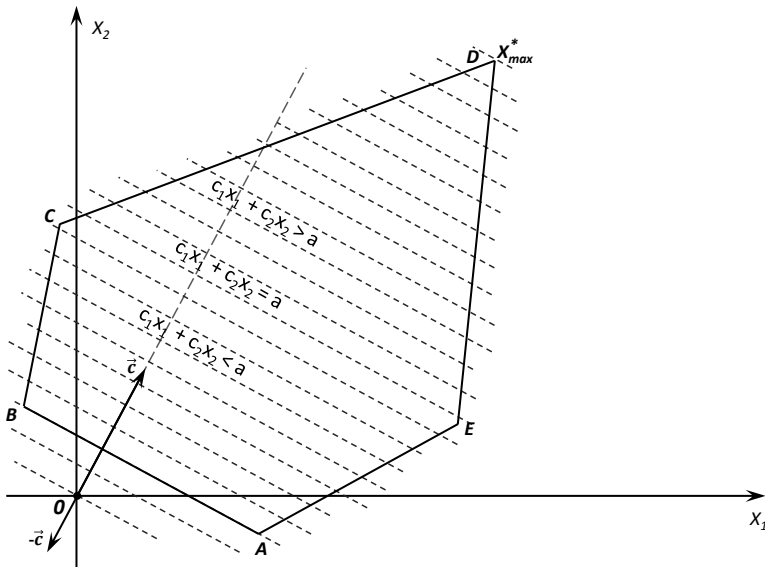
Նախ՝ կառուցենք $-4x_1 + 2x_2 = 0$ ուղղի գրաֆիկը. $x_1 = 0, \Rightarrow x_2 = 0$, հետևաբար՝ դա անցնում է $(0,0)$ կետով: Այժմ x_2 -ին տանք 0-ից տարբեր որևէ արժեք, օրինակ՝ $x_2 = 2 \Rightarrow -4x_1 + 2 \cdot 2 = 0, x_1 = 1$, ուստի գրաֆիկը կանցնի մասնա (1,2) կետով:

Այսպիսով՝ որոնելի ուղիղն անցնում է $(0,0)$ և $(1,2)$ կետերով, իսկ փնտրվող փակ կիսահարթությունը կարելի է որոշել՝ այդ ուղղի վրա չգտնվող որևէ կետի կոորդինատները տեղադրելով ոչ խիստ անհավասարման մեջ, օրինակ, $(3,0)$ կետը՝ $-4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \leq 0, \Rightarrow -12 \leq 0$, որը ճիշտ արտահայտություն է, ուստի **նրբագծվածը** կլինի փնտրվող փակ կիսահարթությունը (գծապատկեր 1.31):



Գծապատկեր 1.31

Ինչպես նշվեց, սովորաբար, զԾԽ-ն ունենում է մեկից ավելի սահմանափակումներ, և դրանց բոլորի գրաֆիկները պետք է պատկերել նույն գծագրի վրա ու որոշել դրանց հատումը՝ ԹԼԲ-ն, որը ուռուցիկ է: Այսպիսով՝ (2) և (3) համակարգերի բոլոր սահմանափակումները գրաֆիկորեն ներկայացնելուց հետո պետք է որոշել զԾԽ ԹԼԲ-ն: Ենթադրենք՝ դա ABCDEF բազմանկյունն է (գծապատկեր 1.32):

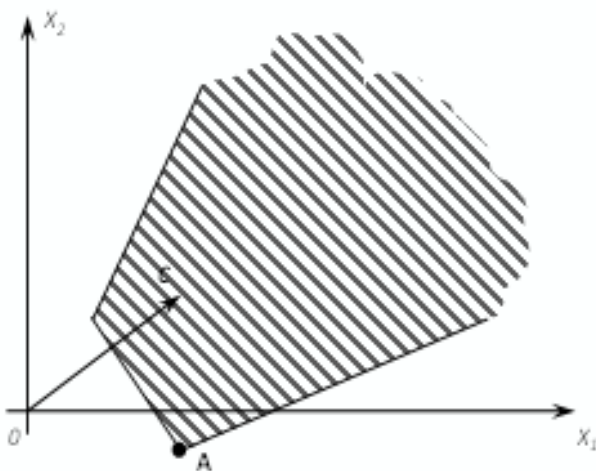


Գծապատկեր 1.32

$C_1X_1 + C_2X_2$ նպատակային ֆունկցիան $C_1X_1 + C_2X_2 = a$ ուղիղ գծի բոլոր կետերում ընդունում է a հաստատուն արժեքը: a պարամետրի տարբեր թվային արժեքների դեպքում կստացվի իրար **գուգահեռ ուղիղների ընտանիք**, որը կոչվում է $z = C_1X_1 + C_2X_2$ նպատակային ֆունկցիայի **մակարդակի գծեր**:

Եթե անհրաժեշտ է որոշել z -ի մեծագույն արժեքն ապահովող կետը (կետերը), ապա պետք է շարժվել a պարամետրի աճի ուղղությամբ կամ, որ նույնն է, $\vec{C} = (c_1; c_2)$ **գրադիենտ (ուղղորդ) վեկտորի ուղղությամբ հնարավորին չափ շատ, բայց մնալով ԹԼԲ-ի մեջ**: Մեր օրինակում այդ ուղղությամբ շարժման վերջնակետը D կետն է, ուստի դա էլ մաքսիմումի կետն է՝ $X^*_{max} = D$: Պարզ է, որ եթե պահանջվում է որոշել z -ի նվազագույն արժեքն ապահովող կետը (կետերը), ապա պետք է շարժվել ճիշտ հակառակ՝ $-\vec{C}$ ուղղությամբ՝ նույնպես ԹԼԲ-ից դուրս չգալով: Մեր օրինակում այդ ուղղությամբ շարժման արդյունքում հասնում ենք AB հատվածին, որի բոլոր կետերը միմիմումի կետեր են:

Եթե զԾԽ ԹԼԲ-ն անսահմանափակ բազմություն է, ապա նպատակային ֆունկցիայի **էքստրեմալ արժեքը կարող է հասանելի չլինել**:



Գծապատկեր 1.33

Օրինակ՝ գծապատկեր 1.33-ում պատկերված անսահմանափակ բազմանկյունային բազմության մեջ նպատակային ֆունկցիային մաքսիմում արժեք հաղորդող կետ չկա՝ **դրա վերևից անսահմանափակ լինելու պատճառով**, իսկ մինիմումի կետը A-ն է:

Տեսնում ենք, որ երկու փոփոխականով ԳԾԽ-ն ևս **լավագույն լուծում կունենա, եթե դրա ԹԼԲ-ն դատարկ չէ, և այդ բազմության վրա նպատակային ֆունկցիան սահմանափակ է էքստրեմումի փնտրման ուղղությամբ**՝ ըստ ԳԾԽ գոյության թեորեմի:

Աղյուսակ 1.8

ԹԼԲ \ Օպտիմալ լուծում	Գոյություն չունի	Կետ	Հատված	Ճառագայթ	Ուղիղ
∅	++	-	-	-	-
Կետ	-	++	-	-	-
Հատված	-	+	+	-	-
Ճառագայթ	+	+	-	+	-
Ուղիղ	+	-	-	-	+
Բազմանկյուն	-	+	+	-	-
Անսահմանափակ բազմանկյունային բազմություն	+	+	+	+	+

$n=2$ դեպքում, կախված ԹԼԲ-ից, օպտիմալ լուծումը կարող է լինել կետ, հատված, ճառագայթ, ուղիղ, ինչպես նաև կարող է գոյություն չունենալ: $n=2$ -ի պարագայում բոլոր 16 հնարավոր դեպքերը ներկայացված են աղյուսակ 1.8-ում:

1.2.7. ԳԾԽ լուծման սիմպլեքս ալգորիթմը

Սիմպլեքս ալգորիթմը հնարավորություն է տալիս նախ՝ որոնելու որևէ թույլատրելի գագաթ (եթե այդպիսին գոյություն ունի), այնուհետև նպատակասլաց կերպով, յուրաքանչյուր հաջորդ քայլում անցնելով նախորդից ավելի նախընտրելի գագաթի, ի վերջո գտնելու դրանցից լավագույնը (եթե այդպիսին կա):

Ժորճանի վերափոխված մի աղյուսակից հաջորդին անցնելու համար պետք է ընտրել **որոշիչ տարր**, որը չի կարող լինել ո՛չ միավոր սյունից, ո՛չ նպատակային ֆունկցիայի տողից և ոչ էլ՝ հավասար գրոյի:

Որոշիչ տարրն ընտրելու համար նախ՝ պետք է որոշել որևէ **թույլատրելի սյուն**, ապա վերջինիս **համապատասխան թույլատրելի տողը**, իսկ որոշիչ տարրը դրանց հատման վանդակում է:

Սյունը կոչվում է **թույլատրելի**, եթե միավոր սյան և այդ սյան համապատասխան տարրերի հարաբերություններից գոնե մեկը ոչ բացասական է:

Տողը կոչվում է տվյալ **թույլատրելի սյանը համապատասխանող թույլատրելի տող**, եթե միավոր և թույլատրելի սյունների համապատասխան տարրերի **հարաբերություններից ամենափոքր ոչ բացասականին** է համապատասխանում:

Ժորդանի վերափոխված հաջորդ աղյուսակի տարրերը հաշվարկվում են նախորդի միջոցով՝ հետևյալ կերպ.

- որոշիչ տարրի դիրքում գրվում է դրա հակադարձը,
- որոշիչ տողի տարրերը (բացի որոշիչ տարրից) բաժանվում են որոշիչ տարրի վրա,
- որոշիչ սյան տարրերը (բացի որոշիչ տարրից) բաժանվում են որոշիչ տարրի վրա՝ նշանափոխվելով,
- մնացած բոլոր տարրերը հաշվարկվում են «թափառող ուղղանկյան» միջոցով, որի գագաթներից մեկը միշտ որոշիչ տարրն է, իսկ մյուսը՝ նախորդ աղյուսակի այն տարրը, որի դիրքին համապատասխանող տարրը պետք է հաշվել հաջորդ աղյուսակում: Ուղղանկյան «գլխավոր» անկյունագծի (որտեղ որոշիչն է) տարրերի արտադրյալից հանվում է մյուս անկյունագծի տարրերի արտադրյալը՝ տարբերությունը բաժանելով որոշիչ տարրի վրա:

Նշանակենք որոշիչ տողը i_0 -ով, իսկ որոշիչ սյունը՝ j_0 -ով: Որոշիչ տարրը կլինի $a_{i_0 j_0}$ -ն: Վերը շարադրվածը կարելի է ներկայացնել բանաձևերով, որտեղ a_{ij} -երը նախորդ, իսկ a'_{ij} -երը հաջորդ աղյուսակի տարրերն են.

$$1) \ a'_{i_0 j_0} = \frac{1}{a_{i_0 j_0}},$$

$$2) \ a'_{i_0 j} = \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}},$$

$$3) \ a'_{ij_0} = -\frac{a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}},$$

$$4) \ a'_{ij} = \frac{a_{i_0 j_0} \cdot a_{ij} - a_{i_0 j} \cdot a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}} = a_{ij} - \frac{a_{i_0 j} \cdot a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}}:$$

Նկարագրենք սիմպլեքս ալգորիթմը հետևյալ փուլերով.

Նախնական փուլ: Կազմվում է Ժորդանի վերափոխված աղյուսակը՝ խնդրին համապատասխան: Դրա տողերի քանակը մեկով ավելի է հիմնական սահմանափակումների (2) համակարգի տողերի քանակից, իսկ սյուների քանակը՝ մեկով ավելի փոփոխականների քանակից. $(m+1)$ -րդ տողը հատկացվում է նպատակային ֆունկցիային, իսկ $(n+1)$ -րդ սյունը՝ ազատ անդամներին: Չխախտելով ընդհանրությունը՝ նպատակային ֆունկցիան ներկայացվում է մաքսիմումի պահանջով: Բոլոր ոչ դրական փոփոխականները փոխարինվում են իրենց հակադիրներով:

Առաջին փուլ: Աղյուսակից հաջորդաբար հեռացվում են (արտաքսվում են) ազատ նշանի անհայտների սյուները՝ յուրաքանչյուր քայլում դրանցից մեկը ներկայացնելով տողով, և դրանք դուրս են գրվում աղյուսակից:

Երկրորդ փուլ: Բոլոր զրոյական տողերին համապատասխանող ազատ անդամները դարձվում են ոչ բացասական՝ անհրաժեշտության դեպքում ամբողջ տողը (-1) -ով բազմապատկելով: Այնուհետև հաջորդական թույլատրելի ձևափոխությունների միջոցով կա՛մ հեռացվում են բոլոր զրոյական տողերը (եթե դա հնարավոր է), կա՛մ պարզվում է, որ խնդիրն ունի «միակ» լուծում, կամ խնդրի ԹԼԲ-ն դատարկ է, հետևաբար՝ ԳԾԽ-ն լուծում չունի:

Երրորդ փուլ: Բոլոր տողերի (բացի վերջինից) ազատ անդամները ձևափոխվում են ոչ բացասական մեծությունների (եթե դա հնարավոր է), կամ պարզվում է, որ խնդրի ԹԼԲ-ն դատարկ է, ուստի ԳԾԽ-ն լուծում չունի:

Չորրորդ փուլ: Վերջին տողի բոլոր տարրերը (բացի ամենավերջինից) ձևափոխվում են ոչ բացասական մեծությունների (եթե դա հնարավոր է), և **օպտիմալ լուծումը որոշվում է**, կամ պարզվում է, որ ԳԾԽ-ն օպտիմալ լուծում չունի նպատակային ֆունկցիայի վերևից անսահմանափակ լինելու պատճառով:

Եթե օպտիմալ լուծում գոյություն ունի, ապա առաջին փուլում տողերով աղյուսակից դուրս գրված ազատ նշանի փոփոխականների օպտիմալ արժեքները որոշվում են՝ չորրորդ փուլում գտնված ոչ բացասական փոփոխականների օպտիմալ արժեքները տեղադրելով համապատասխան տողերում: Առաջին փուլում փոխարինված ոչ դրական փոփոխականները նորից փոխարինվում են իրենց հակադիրներով:

Նպատակային ֆունկցիայի մաքսիմալ արժեքը հավասար է վերջին տողի ամենավերջին տարրին:

Լուծենք հետևյալ ԳԾԽ-ն սիմպլեքս ալգորիթով.

$$1) F(X) = 3X_1 - 2X_2 - X_3 + 5X_4 - 7 \rightarrow \max,$$

$$2) \begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_4 = 5 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 + 3X_4 = 12 \\ 5X_1 + 6X_2 - X_3 + 8X_4 \geq 29 \\ 3X_1 + 3X_3 - X_3 + 5X_4 \leq 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = -X_1 - 2X_2 - X_4 + 5 \\ 0 = -2X_1 - X_2 + X_3 - 3X_4 + 12 \\ X_5 = 5X_1 + 6X_2 - X_3 + 8X_4 - 29 \\ X_6 = -3X_1 - 3X_2 + X_3 - 5X_4 + 20 \end{cases},$$

3) $X_1 \sim 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0:$

Նախնական փուլ: (2) համակարգի բոլոր հավասարումները ներկայացվում են գրոյական տողերով այնպես, որ ազատ անդամները լինեն ոչ բացասական, բոլոր ոչ խիստ անհավասարումները դարձվում են հավասարումներ, ոչ բացասական նոր անհայտներ ներմուծելով, որոնք լուծվում են՝ ըստ այդ նոր անհայտների: Այսպիսով կազմվում է ժողովանի վերափոխված աղյուսակը՝ խնդրին համապատասխան:

	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	$-X_4$	1	θ_1
0	1	2	0	1	5	5 : 1
0	2	1	-1	3	12	12 : 2
X_5	-5	-6	1	-8	-29	29 : 5
X_6	3	3	-1	5	20	20 : 3
F	-3	2	1	-5	-7	

Առաջին փուլ: Աղյուսակից արտաքսվում են բոլոր ազատ նշանի փոփոխականները՝ $X_j \sim 0$ (այսինքն՝ այն փոփոխականները, որոնց վրա նշանի սահմանափակում չկա), որից հետո դրանց համապատասխանող տողերը դուրս են գրվում աղյուսակից: Արտաքսումը կատարվում է հետևյալ ձևով. որպես արտաքսվող է ընտրվում ազատ նշանի փոփոխականի սյունը, իսկ արտաքսվող տող կարելի է (բայց պարտադիր չէ) ընտրել **θ սյան կանոնով** (կազմվում են միավոր և արտաքսվող սյուների համապատասխան տարրերի հարաբերությունները և ոչ բացասականներից ընտրվում է ամենափոքրը):

Սեր օրինակում ազատ նշանի փոփոխական է X_1 -ը, հետևաբար՝ արտաքսվող կլինեն X_1 -ի սյունը և առաջին տողը:

	$-X_2$	$-X_3$	$-X_4$	1
X_1	2	0	1	5
0	-3	-1	1	2
X_5	4	1	-3	-4
X_6	-3	-1	2	5
F	8	1	-2	8

	$-X_2$	$-X_3$	$-X_4$	1	
0	-3	-1	1	2	2 : 1
X_5	4	1	-3	-4	4 : 3
X_6	-3	-1	2	5	5 : 2
F	8	1	-2	8	

$$X_1 = -2X_2 - X_4 + 5:$$

Երկրորդ փուլ: Աղյուսակում տեղափոխվում են 0-ական տողերը, որից հետո հեռացվում են 0-ական սյուները՝ համաձայն ժորդանի աղյուսակի հատկությունների: Արտաքսումը կատարվում է հետևյալ կերպ. 0-ական տողում ընտրվում է առաջին պատահած դրական թիվը (եթե այդպիսիք չկան՝ համակարգի անհամատեղելիության պատճառով ԳՕԽ-ն լուծում չունի), որին համապատասխանող սյունը համարվում է արտաքսվող: Արտաքսվող տողն ընտրվում է θ սյան կանոնով: Եթե այդպիսի ընտրված տողը համընկնում է 0-ականին, ապա արտաքսումից հետո 0-ական սյունը հեռացվում է աղյուսակից: Իսկ եթե համապատասխան տողը 0-ական չէ, ապա արտաքսումից հետո նորից վերադառնում են սկզբում ընտրված 0-ական տող, ընտրում առաջին պատահած դրական թիվը, և այդպես շարունակ:

Այսպիսով՝ 0-ական տողում գտանք 1-ը (առաջին տողի երրորդ տարրը), հետևաբար՝ X_4 -ը արտաքսվող սյունն է, ուստի ըստ θ -ի՝ արտաքսվող տողը կլինի X_5 -ը:

	$-X_2$	$-X_3$	$-X_5$	1	θ
0	-5/3	-2/3	1/3	2/3	2:1
X_4	-4/3	-1/3	-1/3	4/3	---
X_6	-1/3	-1/3	2/3	7/3	7:2
F	16/3	1/3	-2/3	32/3	

	$-X_2$	$-X_3$	1
X_5	-5	-2	2
X_4	-3	1	2
X_6	3	1	1
F	2	-1	12

Եթե առաջին փորձից 0-ական տողը չի հեռացվում, ապա II փուլի հաջորդ քայլում նորից են փորձում դա անել. այժմ որոշիչ տարրը 1/3-ն է, որը համապատասխանում է 0-ական տողին, և այն արդեն հեռացվում է, հետևաբար՝ II փուլն ավարտվում է:

Երրորդ փուլ: Անհրաժեշտ է միավոր սյան բոլոր տարրերը (բացի ամենավերջինից) դարձնել ոչ բացասական թվեր հետևյալ կերպ. նախ՝ ընտրվում է միավոր սյան որևէ բացասական տարր, ապա դրան համապատասխանող տողում՝ առաջին պատահած բացասական թիվը (եթե գոնե մեկ այդպիսինը չկա՝ ԳՕԽ-ն լուծում չունի համակարգի անհամատեղելիության պատճառով), որին համապատասխանող սյունը համարվում է արտաքսվող: Արտաքսվող տողն ընտրվում է θ սյան կանոնով: Արտաքսումները կատարվում են այնքան ժամանակ, քանի դեռ միավոր սյան բոլոր տարրերը չեն վերածվել ոչ բացասական թվերի կամ չի պարզվել, որ խնդրի ԹԼԲ-ն դատարկ է: Մեր օրինակում III փուլը բաց է թողնվում:

Չորրորդ փուլ: Նախորդ բոլոր փուլերում կատարվող գործողությունները ճիշտ են ինչպես մաքսիմումի, այնպես էլ մինիմումի

պահանջով նպատակային ֆունկցիաներով խնդիրների համար, քանի որ վերաբերում են ԳԾԽ (2) և (3) համակարգերին:

Սեր օրինակում՝ $F(X) \rightarrow \max$: Այս դեպքում աղյուսակի վերջին տողի բոլոր տարրերը պետք է լինեն ոչ բացասական (բացի ամենավերջինից): $F(X) \rightarrow \min$ դեպքում վերջին տողի բոլոր տարրերը պետք է լինեն ոչ դրական (բացի ամենավերջինից):

Եթե F տողում կան բացասական տարրեր, ապա դրանք պետք է արտաքսվեն հետևյալ կերպ. բացասական տարրին համապատասխանող սյունը արտաքսվող սյունն է, իսկ տողն ընտրվում է θ սյան կանոնով (եթե դա հնարավոր է): Վերջում, երբ $F(X)$ -ի տողում արդեն բոլոր տարրերը դարձվել են ոչ բացասական (բացի ամենավերջինից), ապա օպտիմալ լուծումը և նպատակային ֆունկցիայի առավելագույն արժեքը գտնված են:

	$-X_2$	$-X_3$	1	θ
X_5	-5	-2	2	----
X_4	-3	-1	2	----
X_6	3	1	1	1:1
F	2	-1	12	

	$-X_2$	$-X_6$	1
X_5	1	2	4
X_4	0	1	3
X_3	3	1	1
F	5	1	13

Վերջին աղյուսակի F տողում չկա բացասական գործակից, ուստի, սյուներին համապատասխանող բոլոր փոփոխականները հավասարեցնելով 0-ների, հնարավոր է հաշվել դրանց օպտիմալ արժեքները. $X_2 = 0$, $X_6 = 0$, հետևաբար՝ $X_5 = 4$, $X_4 = 3$, $X_3 = 1$, ուստի $X_1 = -2X_2 - X_4 + 5 = -2 \cdot 0 - 3 + 5 = 2$: Վերջնական պատասխանում պետք է նշել, իհարկե, միայն **սկզբնական** փոփոխականները, իսկ ներմուծվածները՝ ոչ:

Պատ.՝ $X^* = (2, 0, 1, 3)$, $F_{\max} = 13$:

Չորրորդ փուլում արտաքսվող սյան տարրերից գոնե մեկը պետք է դրական լինի, այլապես θ սյան կանոնով որոշիչ տող ընտրել հնարավոր չէ: Այս դեպքը նշանակում է, որ նպատակային ֆունկցիան ԹԼԲ-ի վրա վերևից սահմանափակ չէ մաքսիմումի պահանջով խնդրի համար (իսկ մինիմումի պահանջով խնդրի համար նպատակային ֆունկցիան ներքևից սահմանափակ չէ):

Եթե երկրորդ, երրորդ և չորրորդ փուլերում θ սյունում կա 0 (դա նշանակում է, որ միավոր սյան մեջ կա 0), ապա դա շատ վտանգավոր է, քանի որ արտաքսում անելով հենքը փոխվում է, իսկ հենքային լուծումը՝ ոչ. ԳԾԽ-ն վերածվող է: Այս վիճակից ելք գտնելու տարբեր եղանակներ են առաջարկվում, որոնք թույլ են տալիս դուրս գալ պարբերաշրջանից: Այլապես հնարավոր է հայտնվել անվերջ պարբերաշրջանում, որի արդյունքում ամենա-

շատը 6 քայլից հետո հնարավոր է հանգել սկզբնական (պարբերա-
շրջանում հայտնվելու իմաստով) աղյուսակին:

1.2.8. ԳԾԽ լուծման սիմպլեքս ալգորիթի ծրագիրը

Նկարագրենք գծային ծրագրավորման այնպիսի մեթոդա-
կան ծրագիր, որի միջոցով միաժամանակ լուծվում են ինչպես ԳԾ
ուղիղ, այնպես էլ դրա երկակի խնդիրները:

Նախ՝ մինչև ծրագրին դիմելն անհրաժեշտ է ցանկացած տես-
քով առաջադրված ԳԾԽ ոչ խիստ անհավասարումները ներկայաց-
նել հավասարումներով՝ ոչ բացասական լրացուցիչ փոփոխական-
ներ ներմուծելով, իսկ սկզբնական փոփոխականները պետք է լինեն
ոչ բացասական (եթե որոշ փոփոխականներ ոչ դրական են, ապա
պետք է դրանք փոխարինել իրենց հակադիրներով):

Simplex ծրագիրն ակտիվացնելուց հետո պետք է կատարել
հետևյալ գործողությունները.

1. POM. ակտիվացնել:
2. POM. սեղմել մկնիկի ձախ կոճակը (բացվում է ցուցակ):
3. Ընտրել POM. EXE՝ մկնիկի ձախ կոճակի երկու սեղմումով
(գտնվում է ցուցակի ներքևում):
4. Ստացվում է AB:POM, սեղմել F2:
5. Սեղմել 2 (կա՛մ 1, կա՛մ “m”)՝ գույնի ընտրության համար.
սա ոչ կարևոր քայլ է:
6. Ընտրել Linear programming (բացված ցուցակի աջ կողմի
երկրորդ տողն է)՝ աջ և ներքև պատկերող սլաքներով:
7. Enter:
8. F2. հավաքել խնդրի անունը (որևէ կամայական անուն):
9. Enter:
10. Ներածել ԳԾԽ սահմանափակումների մատրիցի ($m \times n$) չա-
փողականությունը (m - Enter, n - Enter). ներածվում են m -ի
և n -ի թվային արժեքները:
11. Enter. ընտրել max կամ min (նպատակային ֆունկցիայի
իմաստով). սեղմել max կամ min գրառումների վրա:
12. Enter. բացել դատարկ մատրից, որը պետք է լրացնել.
– առաջին տող՝ նպատակային ֆունկցիայի թվային գործա-
կիցները,
– մատրիցի վանդակներ՝ ԳԾԽ սահմանափակումների մատ-
րիցի տարրերի թվային արժեքները (մոդելում բացակայող
անդամների գործակիցները լրացնել «0»-ներով), ստան-
դարտ մատրիցում հավասարման նշանների գրառման
համար սեղմել բացակի (ինտերվալի) ստեղծող:

13. F10. լուծումները ստանալու համար (Էկրանի վրա բացվում են 12-րդ կետում լրացված մատրիցը և լուծման արդյունքները): Ներքևի տողում Values $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ն ԳԾ ուղիղ խնդրի օպտիմալ լուծման թվային արժեքներն են, իսկ վերջին սյան մեջ Shadow $y_1, y_2, \dots, y_m$ -ն՝ ԳԾ երկակի խնդրի օպտիմալ լուծման թվային արժեքները: Նպատակային ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքը տեղադրված է լինում ներքևի աջ անկյունում:

Ծանոթություն. Եթե ԳԾ-ն ԹԼԲ-ն դատարկ բազմություն է, ապա Էկրանի վերջին տողում կհայտնվի՝ «No feasible region exists», իսկ եթե նպատակային ֆունկցիան անսահմանափակ է փնտրման մեջ՝ «The solution is unbounded» տեղեկությունը:

14. Արդյունքների ամփոփումը տեսնելու համար սեղմել F1:

Ծանոթություն. Եթե անհրաժեշտ է լուծված խնդրի նախնական պայմաններում փոփոխել ներածված թվային արժեքներից մեկը կամ մի քանիսը և խնդիրը լուծել նոր պայմանների դեպքում (սա հնարավորություն է ստեղծում լուծելու պարամետրական ԳԾ-ն և հետազոտելու լուծման վարքը՝ կախված որևէ պարամետրի թվային արժեքի փոփոխությունից, այսինքն՝ վերլուծելու **զգայունությունը**), ապա պետք է կատարել հաջորդ քայլը:

15. Սեղմել ESC, ինչը կապահովի **վերադարձ դեպի նախնական մատրիցը**, այսինքն՝ 12-րդ կետը, որտեղ, փոփոխելով յուրաքանչյուր նախնական տվյալ կամ տվյալներ և նորից սեղմելով F10 (սա, փաստորեն, վերադարձ է դեպի 13-րդ կետ), կարելի է ստանալ «նոր» խնդրի լուծումը: Վերջին՝ 15-րդ կետը կարելի է կրկնել բազմաթիվ անգամ: Արդյունքում կարելի է կառուցել, օրինակ, նպատակային ֆունկցիայի՝ փոփոխվող պարամետրի թվային արժեքներից կախվածության գրաֆիկ:

Լուծել ԳԾ-ն երը սիմպլեքս մեթոդի ծրագրով (պատասխանները տրված են).

- I. 1) $Z = X_1 - 3X_2 + 9X_3 + 15X_4 \rightarrow \max$,
 2) $\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10 \\ X_1 - X_2 + 2X_3 + X_4 = 2 \end{cases}, \quad X^* = (0; 4; 0; 6), \quad Z_{\max} = 78,$
 3) $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$:

- II. 1) $Z = 2X_1 + 5X_2 \rightarrow \max$,

$$2) \begin{cases} X_1 + 4X_2 \leq 24 \\ 3X_1 + X_2 \leq 21 \\ X_1 + X_2 \leq 9 \end{cases}, \quad X^* = (4; 5), \quad Z_{\max} = 33,$$

$$3) X_1 \geq 0, X_2 \geq 0:$$

$$\text{III. } 1) Z = 5X_1 - 2X_2 \rightarrow \max,$$

$$2) \begin{cases} X_1 - X_2 = 6 \\ -X_1 + X_2 = 2 \end{cases}, \quad X \in \emptyset,$$

$$3) X_1 \geq 0, X_2 \geq 0: \quad (\text{"No feasible region exists"})$$

$$\text{IV. } 1) Z = -3X_1 - 4X_2 - 5X_3 \rightarrow \min,$$

$$2) \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \geq 3 \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 6 \end{cases}, \quad Z_{\min} \rightarrow -\infty,$$

$$3) X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0: \quad (\text{"The solution is unbounded"})$$

Գծային ծրագրավորման խնդիրները կարելի է լուծել նաև **Excel** ծրագրային փաթեթի միջավայրում՝ **Solver** գործիքով:

Տրված գծային ծրագրավորման խնդրի մոդելը կառուցելուց հետո պետք է լուծել ձևակերպված խնդիրը Excel փաթեթի Solver գործիքով: Դրա համար պետք է հաջորդաբար կատարել հետևյալ քայլերը.

Քայլ I: Մուտքագրել խնդրի տվյալները՝ փոփոխականները, դրանց անունները, նպատակային ֆունկցիայի և սահմանափակումների բանաձևերը:

Քայլ II: Բացել Solver-ի երկխոսական պատուհանը և մուտքագրել տվյալները: Սահմանափակումները մուտքագրվում են Add կոճակի սեղմմամբ բացվող Add Constraint պատուհանում:

Քայլ III: Solver կոճակի սեղմումով գործարկել խնդրի լուծման որոնման գործընթացը, որի արդյունքում տրվում է հաղորդագրություն օպտիմալ լուծման գոյության (Solver found a solution) կամ դրա գոյություն չունենալու մասին:

Ստացված արդյունքները կարելի է պահպանել կամ ոչ:

Լուծման արդյունքներն արտացոլվում են տվյալների նախնական մուտքագրման աղյուսակում:

Excel փաթեթի Solver գործիքով կարելի է լուծել նաև գծային ծրագրավորման դասին պատկանող տրանսպորտային և միջնորդային հաշվեկշռի խնդիրներ, ինչպես նաև իրականացնել ԳԾԽ լուծումը գրաֆիկորեն:

**ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ
ԵՐԿԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ**

74

(2.1)-(2.3) և (2.4)-(2.6) խնդիրները կոչվում են **ԳԾ փոխադարձ երկակի խնդիրների զույգ**: Պայմանականորեն (2.1)-(2.3) խնդիրն անվանենք **ուղիղ**, իսկ (2.4)-(2.6)-ը՝ **երկակի**: Նկատենք, որ եթե ուղիղը $\max$ -ի պահանջով խնդիր է, ապա դրա երկակին կլինի $\min$ -ի պահանջով խնդիր, և ընդհակառակը: Ընդ որում, ուղիղ խնդրի երկակիի երկակին նույն ուղիղ խնդիրն է:

Նկատենք, որ երկակի խնդրի անհայտների թիվը հավասար է ուղիղ խնդրի (2.2) համակարգի տողերի (սահմանափակումների) թվին: Այսպես՝ (2.2) համակարգն ունի m տող, հետևաբար՝ (2.4)-(2.6) խնդիրը կունենա m հատ փոփոխական՝ $y_i \quad i=1, m$:

Երկակի խնդիրը կարելի է կազմել հետևյալ քայլերի օգնությամբ.

Քայլ I: Երկակի խնդրի (2.4) նպատակային ֆունկցիան ստացվում է որպես ուղիղ խնդրի (2.2) սահմանափակումների համակարգի ազատ անդամների $b=(b_1, b_2, \dots, b_m)$ վեկտորի և երկակի խնդրի $y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$ ներմուծված փոփոխականների վեկտորի սկալյար արտադրյալ (վեկտորների համապատասխան բաղադրիչների արտադրյալների գումար)՝ $b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$: Եթե ուղիղ խնդրի նպատակային ֆունկցիան ունի ազատ անդամ՝ c_0 , ապա երկակի խնդրի նպատակային ֆունկցիան կընդգրկի միևնույն ազատ անդամը՝ ընդ որում, միևնույն նշանով: Եթե ուղիղ խնդրի նպատակային ֆունկցիան ձգտում է $\max$ ($\min$)-ի, ապա համապատասխան երկակի խնդրի նպատակային ֆունկցիան կձգտի $\min$ -ի ($\max$ -ի):

Քայլ II: Երկակի խնդրի (2.5) համակարգի սահմանափակումների թիվը հավասար է ուղիղ խնդրի անհայտների թվին՝ n հատ: (2.5) համակարգի յուրաքանչյուր j -րդ տողը ստացվում է որպես ուղիղ խնդրի (2.2) համակարգում x_j անհայտի սյանը համապատասխանող գործակիցների $a_j=(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ վեկտորի և երկակի խնդրի անհայտների $y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$ վեկտորի սկալյար արտադրյալ՝ $a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m$, իսկ որպես ազատ անդամ վերցվում է ուղիղ խնդրի նպատակային ֆունկցիայում j -րդ անհայտին համապատասխանող c_j գործակիցը:

Երկակի խնդրի (2.5) համակարգի j -րդ տողի նշանը որոշվում է ուղիղ խնդրի (2.3) պայմանից՝ j -րդ անհայտի նշանով ($\max$ -ի պահանջով խնդրից $\min$ -ի խնդրին անցնելու դեպքում ուղիղ խնդրի

անհայտի նշանը վերցվում է նույնությամբ, իսկ min-ից max-ին անց-
նելու դեպքում՝ նշանը փոխվում է, այսինքն՝ վերցվում հակառակը):
Եթե ուղիղ խնդրում j -րդ անհայտը ազատ նշանի է, ապա երկակի
խնդրի j -րդ պայմանը (2.5) համակարգում հավասարում է:

Քայլ III: Երկակի խնդրի (2.6) պայմանում յուրաքանչյուր y_i
անհայտի նշանը որոշվում է ուղիղ խնդրի (2.2) համակարգում իրեն
համապատասխանող i -րդ սահմանափակման նշանով: max-ից
min-ի խնդրին անցնելու դեպքում այդ նշանը վերցվում է հակառա-
կը (փոխվում է), իսկ min-ից max-ին անցնելու դեպքում այն պահ-
պանվում է նույնությամբ: Եթե ուղիղ խնդրի (2.2) համակարգի i -րդ
պայմանը հավասարում է, ապա երկակի խնդրի (2.6) համակար-
գում y_i փոփոխականն ունի ազատ նշան:

Օրինակ՝

$$F(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 7 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 \geq -5 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \sim, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0:$$

Երկակի խնդիրը կլինի հետևյալը.

$$\Phi(Y) = 8y_1 - 5y_2 - 7 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ 5y_1 - y_2 = 1 \\ -4y_1 + 2y_3 \leq -1 \\ -2y_2 - y_3 \geq 4 \end{cases},$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \sim:$$

Երկակի խնդիրների միջև գոյություն ունեն մի շարք կարևոր
առնչություններ, որոնք արտահայտվում են լեմմերով և թեորեմնե-
րով: Դիտարկենք ընդհանուր տեսքով ներկայացված երկակի
խնդիրների հետևյալ զույգը.

$$F(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (2.7) \quad \Phi(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.8) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i (\leq, =, \geq) c_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.11)$$

$$x_j (\leq, \sim, \geq) 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.9) \quad y_i (\geq, \sim, \leq) 0, \quad i = \overline{1, m}: \quad (2.12)$$

Լեմմա 1: **Հիմնական անհավասարություն:** (2.7)-(2.9) ուղիղ և (2.10)-(2.12) երկակի խնդիրների կամայական $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ և $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ թույլատրելի լուծումների համար իրավացի է հետևյալ անհավասարությունը.

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i : \quad (2.13)$$

Ապացույց:

Որպես թույլատրելի լուծումներ՝ X և Y վեկտորները բավարարում են համապատասխանաբար՝ (2.8, 2.9) և (2.11, 2.12) սահմանափակումները: Ուստի, տեղադրելով X -ը (2.8) համակարգի բոլոր m սահմանափակումներում, կստանանք ճշմարիտ թվային առնչություններ, որոնց երկու կողմը բազմապատկենք Y -ով: Հաշվի առնելով, որ ուղիղ խնդիրը մաքսիմումի պահանջով է (որի դեպքում երկակի խնդրի i -րդ փոփոխականի նշանը (2.12) պայմաններում վերցվում է ուղիղ խնդրի (2.8)-ում իրեն համապատասխանող i -րդ սահմանափակման նշանին հակառակ), կստանանք.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i (\leq, =) b_i y_i, \quad i = \overline{1, m}: \quad (2.14)$$

Գումարելով բոլոր m առնչությունները՝ կունենանք.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i : \quad (2.15)$$

Նույնկերպ, (2.11)-ի մեջ տեղադրելով Y թույլատրելի լուծումը և ստացված n հատ ճշմարիտ թվային առնչությունների երկու կողմը բազմապատկելով X -ով, հետևելով երկակի խնդիրների կազմման կանոններին, կստանանք.

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i x_j (\geq, =) c_j x_j, \quad j = \overline{1, n} : \quad (2.16)$$

Գումարելով բոլոր n առնչությունները՝ կունենանք.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i x_j \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j : \quad (2.17)$$

Համադրելով միմյանց հետ (2.15) և (2.17) առնչությունները՝ կստանանք.

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i ,$$

որտեղ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ը՝ ուղիղ, իսկ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ -ը՝ երկակի խնդրի կամայական թույլատրելի լուծումներն են: Իսկ դա նշանակում է, որ երկակի խնդիրների զույգի կամայական թույլատրելի լուծումների համար տեղի ունի (2.13) հիմնական անհավասարությունը: Լեւմ 1-ն ապացուցված է:

(2.13) կրկնակի անհավասարությունը կոչվում է **երկակիության տեսության հիմնական անհավասարություն**:

Հետևանք 1: ԳԾ ուղիղ խնդրի մաքսիմումի պահանջով նպատակային ֆունկցիայի ցանկացած արժեք, որը ստացվում է կամայական թույլատրելի լուծման համար, չի կարող գերազանցել իր երկակի խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմության վրա մինիմումի պահանջով նպատակային ֆունկցիայի ընդունած ցանկացած արժեքը:

Հետևանք 2: Եթե երկակի խնդիրների զույգից յուրաքանչյուրն ունի գոնե մեկ թույլատրելի լուծում, ապա այդ խնդիրներից յուրաքանչյուրը կունենա նաև լավագույն լուծում:

Իրոք, եթե X վեկտորը՝ ուղիղ խնդրի, իսկ Y -ը՝ երկակի թույլատրելի լուծումն է, ապա այդ խնդիրների թույլատրելի լուծումների բազմությունները դատարկ չեն: Մյուս կողմից, (2.13) հիմնական անհավասարությունից հետևում է, որ (2.7) նպատակային ֆունկցիան ուղիղ խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմության վրա վերևից սահմանափակ է $\Phi(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ մեծությամբ: Հետևա-

բար՝ բավարարված են ԳԾԽ լավագույն լուծման **գոյության թեորեմի** պայմանները: Ուստի, ըստ գոյության թեորեմի, (2.7)–(2.9) ուղիղ խնդիրն ունի լավագույն լուծում: Նման դատողություններով կարելի է ապացուցել երկակի խնդրի լավագույն լուծման գոյությունը:

Լեմմա 2: Եթե $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ և $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ վեկտորները համապատասխանաբար՝ ուղիղ և երկակի խնդիրների այնպիսի թույլատրելի լուծումներ են, որոնց համար $\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$, ապա X^* վեկտորը ուղիղ խնդրի լավագույն լուծումն է, իսկ Y^* վեկտորը՝ երկակի խնդրի լավագույն լուծումը:

Ապացույց:

Երկակիության տեսության (2.13) հիմնական անհավասարությունից հետևում է, որ ուղիղ խնդրի կամայական՝ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ և երկակի խնդրի՝ $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ թույլատրելի լուծումների համար իրավացի է հետևյալ անհավասարությունը.

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* : \quad (2.18)$$

Ըստ Լեմմի պայմանի՝ $\sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$, որը տեղադրելով

(2.18)-ի մեջ՝ կստանանք. $\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$, հետևաբար՝

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j^* : \quad \text{Ուստի ուղիղ խնդրի կամայական՝ } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

թույլատրելի լուծման համար տեղի ունի $F(X) \leq F(X^*)$ պայմանը: Այսինքն՝ $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ թույլատրելի լուծման դեպքում (2.7)–(2.9) խնդրի նպատակային ֆունկցիան ընդունում է իր առավելագույն արժեքը, ինչը նշանակում է, որ X^* թույլատրելի լուծումն իրոք համապատասխան խնդրի լավագույն լուծումն է:

Նման դատողություններով, երկակի խնդրի կամայական՝ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ և ուղիղ խնդրի՝ X^* թույլատրելի լուծումների նկատմամբ կիրառելով հիմնական անհավասարությունը, կստանանք.

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* \Rightarrow \sum_{i=1}^m b_i y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* :$$

Ուստի երկակի խնդրի կամայական՝ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ թույլատրելի լուծման համար իրավացի է $\Phi(Y) \geq \Phi(Y^*)$ պայմանը: Այսինքն՝ $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ թույլատրելի լուծման դեպքում (2.10)-(2.12) խնդրի նպատակային ֆունկցիան ընդունում է իր նվազագույն արժեքը, ինչը նշանակում է, որ Y^* թույլատրելի լուծումն իրոք (2.10)-(2.12) խնդրի լավագույն լուծումն է: Լեմմ 2-ն ապացուցված է:

Լեմմ 3: Եթե գծային ծրագրավորման խնդիրն ունի լավագույն լուծում, ապա դրան համապատասխանող երկակի խնդիրը նույնպես կունենա լավագույն լուծում: Այլ կերպ ասած՝ կա՛մ երկակի խնդիրները միաժամանակ ունեն լավագույն լուծումներ, կա՛մ դրանցից ոչ մեկը լավագույն լուծում չունի: Լեմմ 3-ը ներկայացվում է առանց ապացույցի:

Հաջորդ Լեմմի շարադրանքի պարզության համար ենթադրենք, որ ԳԾ ուղիղ խնդիրը տրված է (2.19)-(2.21) սիմետրիկ տեսքով, որին համապատասխանում է (2.22)-(2.24) երկակի խնդիրը.

$$F(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (2.19) \quad \Phi(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \quad (2.22)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.20) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.23)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.21) \quad y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}: \quad (2.24)$$

Լեմմ 4: Եթե (2.20, 2.21) և (2.23, 2.24) համակարգերից յուրաքանչյուրն առանձին-առանձին համատեղելի է, ապա համատեղելի է նաև հետևյալ համակարգը.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ x_j \geq 0, y_i \geq 0 \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{array} \right. : \quad (2.25)$$

Լեմմ 4-ը ներկայացվում է առանց ապացույցի:

Վերը շարադրված չորս լեմմերը ստորև բերվող երկակիության տեսության առաջին թեորեմի կարևորագույն բաղադրիչներից են:

Երկակիության I թեորեմ: Եթե գծային ծրագրավորման (2.19)-(2.21) խնդիրն ունի լավագույն լուծում, ապա դրա երկակի (2.22)-(2.24) խնդիրը նույնպես կունենա լավագույն լուծում, և նպատակային ֆունկցիաների օպտիմալ արժեքները կլինեն իրար հավասար՝ $F_{max} = \Phi_{min}$:

Ապացույց:

Դիցուք՝ $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ վեկտորը (2.19)-(2.21) ուղիղ խնդրի լավագույն լուծումն է: Լեմմ 3-ի համաձայն՝ (2.22)-(2.24) երկակի խնդիրը նույնպես ունի լավագույն լուծում՝ $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$:

Որպես լավագույն լուծումներ՝ X^* և Y^* վեկտորները համապատասխան խնդիրների թույլատրելի լուծումներն են, հետևաբար՝ բավարարված են լեմմ 1-ի և լեմմ 4-ի պայմանները: Մասնավորապես՝ լեմմ 1՝ հիմնական անհավասարությունից կունենանք.

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* : \quad (2.26)$$

Մյուս կողմից, լեմմ 4-ի (2.25) համակարգի համատեղելի լինելուց հետևում է.

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* : \quad (2.27)$$

(2.26) և (2.27) անհավասարություններից կստանանք.

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* , \quad (2.28)$$

որտեղ $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ և $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ վեկտորները համապատասխանաբար՝ ուղիղ և երկակի խնդիրների թույլատրելի լուծումներ են:

Այսպիսով՝ բավարարված են լեմմա 2-ի պայմանները, հետևաբար՝ $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ և $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ վեկտորները համապատասխանաբար՝ ուղիղ և երկակի խնդիրների լավագույն լուծումներ են, որոնց համար նպատակային ֆունկցիաների օպտիմալ արժեքներն իրար հավասար են:

I թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով՝ (2.28) $\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$ հավասարությունը ուղիղ և

երկակի խնդիրների X^* և Y^* թույլատրելի լուծումների օպտիմալության անհրաժեշտ և բավարար պայման է:

ԳԾ երկակի խնդիրների թույլատրելի լուծումների օպտիմալության անհրաժեշտ և բավարար մեկ այլ հայտանիշ (լավագույն լուծումը գտնելու տեսանկյունից՝ գուցե առավել կիրառական) առաջարկում է **երկակիության II թեորեմը**:

Երկակիության II թեորեմ: Որպեսզի գծային ծրագրավորման ուղիղ

և երկակի խնդիրների $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ և $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ թույլատրելի լուծումները հանդիսանան այդ խնդիրների լավագույն լուծումներ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ դրանց բաղադրիչները բավարարեն հետևյալ համակարգերը.

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) \cdot y_i^* = 0 \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.29)$$

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) \cdot x_j^* = 0 \quad j = \overline{1, n}: \quad (2.30)$$

Ապացույց:

Անհրաժեշտություն. տրված են $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ՝ (2.19)-

(2.21) ուղիղ և $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ ՝ (2.22)-(2.24) երկակի խնդիրների լավագույն լուծումները: Ապացուցենք (2.29) և (2.30) պայման-

ների իրավացի լինելը X^* և Y^* լավագույն լուծումների բաղադրիչների համար:

Գծի լավագույն լուծման սահմանման համաձայն՝ X^* -ը և Y^* -ը, որպես լավագույն լուծումներ, համապատասխան խնդիրների թույլատրելի լուծումներ են, որոնց համար տեղի ունի հիմնական անհավասարությունը (լեմմա 1).

$$F(X^*) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \Phi(Y^*): \quad (2.31)$$

Օգտվելով երկակիության I թեորեմից ($F_{\max} = \Phi_{\min}$)՝ կստանանք $F(X^*) = \Phi(Y^*)$, հետևաբար՝ (2.31) պայմանը վերածվում է հավասարության.

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n c_j x_j^*}_{(I)} = \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^*}_{(II)} = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* : \quad (2.32)$$

Դիտարկենք (2.32) պայմանի (I) գույգը՝ կատարելով պարզագույն ձևափոխություններ.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* ,$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* - \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) x_j^* \right) = 0 : \quad (2.33)$$

Նկատենք, որ (2.33) պայմանի յուրաքանչյուր j -րդ գումարելին ոչ բացասական է.

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right)}_{\geq 0} x_j^* \geq 0 \quad j = \overline{1, n} :$$

Հաշվի առնելով, որ n հատ ոչ բացասական թվերի գումարը զրոյի է հավասար միայն յուրաքանչյուր j -րդ գումարելու՝ զրոյի հավասար լինելու դեպքում, կստանանք (2.29) պայմանները.

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) \cdot x_j^* = 0 \quad j = \overline{1, n} :$$

Նույն դատողությունները կիրառելով (2.32) պայմանի (II) զույգի նկատմամբ՝ կունենանք (2.30) պայմանները: II թեորեմի անհրաժեշտությունն ապացուցված է:

Բավարարություն. տրված են $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ (2.19)-(2.21) ուղիղ և $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ (2.22)-(2.24) երկակի խնդիրների թույլատրելի լուծումները, որոնց բաղադրիչները բավարարում են (2.29) և (2.30) պայմանները: Ապացուցենք X^* և Y^* թույլատրելի լուծումների լավագույն լուծում լինելը՝ համապատասխանաբար ուղիղ և երկակի խնդիրների համար:

(2.29) պայմանների մեջ տեղադրենք X^* և Y^* թույլատրելի լուծումների բաղադրիչները և կատարենք պարզագույն ձևափոխություններ.

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) \cdot y_i^* = 0 \quad i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* = b_i y_i^* \quad i = \overline{1, m} : \quad (2.34)$$

Գումարելով (2.34)-ի բոլոր m պայմանները՝ կունենանք.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = \Phi(Y^*) : \quad (2.35)$$

Նույնպես, (2.30) պայմանների մեջ տեղադրելով X^* և Y^* թույլատրելի լուծումների բաղադրիչները և գումարելով բոլոր n պայմանները, կունենանք.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* x_j^* = \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = F(X^*) : \quad (2.36)$$

(2.35) և (2.36) պայմանների ձախ մասերի հավասարությունից կստանանք՝ $F(X^*) = \Phi(Y^*)$: Չետևաբար՝ բավարարված են լեմմ

2-ի պայմանները, որոնց համաձայն՝ X^* և Y^* թույլատրելի լուծումները համապատասխանաբար՝ ուղիղ և երկակի խնդիրների լավագույն լուծումներն են: II թեորեմի բավարարությունն ապացուցված է: II թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում 1: ԳԾԽ տվյալ սահմանափակումը կոչվում է **կոշտ**, եթե խնդրի ցանկացած լավագույն լուծումն այդ սահմանափակումը բավարարում է որպես հավասարություն:

Սահմանում 2: ԳԾԽ տվյալ սահմանափակումը կոչվում է **ոչ կոշտ**, եթե խնդրի գոնե մեկ լավագույն լուծումն այդ սահմանափակումը բավարարում է որպես խիստ անհավասարություն:

Երկակիության II թեորեմի (2.29) և (2.30) պայմանները կարելի է մեկնաբանել նաև հետևյալ կերպ. եթե երկակի սահմանափակումների զույգից մեկը կոշտ չէ, ապա մյուսը կոշտ է: Դիշտ է նաև հակառակ պնդումը. եթե երկակի սահմանափակումների զույգից մեկը կոշտ է, ապա մյուսը կոշտ չէ:

Իրոք, եթե (2.7)-(2.9) խնդրի գոնե մեկ լավագույն լուծման համար $x_j^* \neq 0$, ապա (2.10)-(2.12) երկակի խնդրի կամայական $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ լավագույն լուծման համար, (2.30) պայմանի

համաձայն, $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j = 0$: Այսինքն՝ եթե (2.10)-(2.12) խնդրի

j-րդ սահմանափակումը կոշտ չէ, ապա երկակի խնդրի համապատասխան սահմանափակումը կոշտ է:

2.2. ԳԾ ԵՐԿԱԿԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՏՆՏԵՍԱԳԻՏԱԿԱՆ ՍԵՎՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՕԳՏԱԳՈՐԾՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՕՐԻՆԱԿՈՎ

Փոխադարձ երկակի խնդիրների զույգի միջև գոյություն ունեն ոչ միայն մաթեմատիկական, այլև բովանդակային տնտեսագիտական առնչություններ: Եթե խնդիրներից մեկն ունի տնտեսագիտական բովանդակություն, ապա դրան համապատասխանող երկակի խնդիրը նույնպես ունի տնտեսագիտական իմաստ՝ սկզբնական խնդրի բովանդակությամբ պայմանավորված:

Փոխադարձ երկակի խնդիրների տնտեսագիտական մեկնաբանումը ներկայացնենք ռեսուրսների օպտիմալ օգտագործման խնդրի օրինակով: Նախ՝ համառոտ կերպով անդրադառնանք սկզբնական (ուղիղ) խնդրի տնտեսագիտական դրվածքին:

Ենթադրենք՝ կազմակերպությունը, ունենալով m տեսակի ռեսուրսների որոշակի պաշարներ, կարող է թողարկել n տեսակի ար-

տադրանք: Ռեսուրսների ինդեքսը նշանակենք i -ով ($i = \overline{1, m}$), իսկ արտադրատեսակներինը՝ j -ով ($j = \overline{1, n}$):

Նշանակենք b_i -ով i -րդ ռեսուրսի պաշարը ($i = \overline{1, m}$): Ենթադրենք՝ հայտնի է j տեսակի միավոր արտադրանք արտադրելու համար i -րդ ռեսուրսի ծախսը՝ a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), այլ կերպ՝ տեխնոլոգիական կամ ռեսուրսի սպառման նորման, որն արտահայտվում է վերջինիս օգտագործման ֆիզիկական միավորներով: Հայտնի է նաև արտադրողի շահույթը j տեսակի արտադրանքի միավորի իրացումից՝ c_j ($j = \overline{1, n}$):

Պահանջվում է որոշել յուրաքանչյուր արտադրատեսակի թողարկման ենթակա քանակությունն այնպես, որ առկա ռեսուրսների պաշարների պայմաններում արտադրանքի իրացումից շահույթը լինի առավելագույնը:

Նշանակենք x_j -ով j -րդ արտադրատեսակի թողարկվող քանակությունը՝ ($j = \overline{1, n}$), իսկ F -ով՝ բոլոր արտադրատեսակների իրացումից շահույթը: Հետևյալ՝ (2.37)-(2.39) ԳԾԽ-ն ներկայացնում է ուղիղ խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը, որին համապատասխանող երկակին՝ (2.40)-(2.42) պայմաններով ԳԾ խնդիրն է.

$$F(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (2.37) \quad \Phi(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min, \quad (2.40)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.38) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.41)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.39) \quad y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}: \quad (2.42)$$

Երկակի խնդրի տնտեսագիտական իմաստն առավել ակնառու դարձնելու համար ձևակերպենք ուղիղ և երկակի խնդիրները չափողականություններով:

Ուղիղ խնդրի նպատակն է առավելագույնի հասցնել (2.37) շահույթի ֆունկցիան.

$$F(X) = \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} j \text{ տեսակի} \\ 1 \text{ միավոր} \\ \text{արտադրանքի} \\ \text{շահույթ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j \text{ տեսակի} \\ \text{արտադրանքի} \\ \text{թողարկվող} \\ \text{միավորները} \end{pmatrix} = \text{շահույթ}: \quad (2.37')$$

ընդ որում, խնդրի (2.38) սահմանափակումներն են.

$$\sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} i \text{ ռեսուրսի ծախսը} \\ j \text{ տեսակի 1 միավոր} \\ \text{արտադրանքի} \\ \text{թողարկման համար} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} j \text{ տեսակի} \\ \text{արտադրանքի} \\ \text{թողարկվող} \\ \text{միավորները} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} i - \text{րդ} \\ \text{ռեսուրսի} \\ \text{պաշարը} \end{pmatrix}, \quad (2.38')$$

$$i = \overline{1, m},$$

իսկ (2.39) սահմանափակումները՝

$$\begin{pmatrix} j \text{ տեսակի} \\ \text{արտադրանքի} \\ \text{թողարկվող} \\ \text{միավորները} \end{pmatrix} \geq 0, \quad j = \overline{1, n}: \quad (2.39')$$

Այս իմաստով, երկակի խնդրի նպատակն է նվազագույնի հասցնել (2.40)-ը.

$$\Phi(Y) = \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} i - \text{րդ} \\ \text{ռեսուրսի} \\ \text{պաշարը} \end{pmatrix} \bullet y_i = ?, \quad (2.41),$$

(2.42) սահմանափակումների ներքո.

$$\sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} i \text{ ռեսուրսի ծախսը} \\ j \text{ տեսակի 1 միավոր} \\ \text{արտադրանքի} \\ \text{թողարկման համար} \end{pmatrix} \bullet y_i \geq \begin{pmatrix} j \text{ տեսակի} \\ 1 \text{ միավոր} \\ \text{արտադրանքի} \\ \text{շահույթը} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}:$$

Պարզ է, որ երկակի խնդրի սահմանափակումների չափողականությունները կհամընկնեն, եթե y_i փոփոխականն ունենա արժեքային չափողականություն, մասնավորապես՝ եթե y_i -ի չափողականությունը համընկնի i -րդ ռեսուրսի 1 միավորի արժեքի, օրինակ՝ գնի հետ:

Այդ դեպքում երկակի խնդրի նպատակն է նվազագույնի ձգտեցնել.

$$\Phi(Y) = \sum_{i=1}^m \left(\begin{array}{c} i - \text{րդ ռեսուրսի} \\ \text{պաշարը} \end{array} \right) \bullet \left(\begin{array}{c} i - \text{րդ ռեսուրսի} \\ 1 \text{ միավորի արժեքը} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{բոլոր ռեսուրսների առկա} \\ \text{պաշարների արժեքը} \end{array} \right): \quad (2.40')$$

(2.41) սահմանափակումների տնտեսագիտական բովանդակությունն է.

$$\sum_{i=1}^m \left(\begin{array}{c} i \text{ ռեսուրսի ծախսը} \\ j \text{ տեսակի } 1 \text{ միավոր} \\ \text{արտադրանքի} \\ \text{թողարկման համար} \end{array} \right) \bullet \left(\begin{array}{c} i - \text{րդ տեսակի} \\ 1 \text{ միավորի} \\ \text{արժեքը} \end{array} \right) \geq \left(\begin{array}{c} j \text{ տեսակի } 1 \text{ միավոր} \\ \text{արտադրանքի } g \\ \text{շահույթը} \end{array} \right), \quad (2.41')$$

$j = \overline{1, n},$

որը նույնն է, քե

$$\left(\begin{array}{c} j \text{ տեսակի } 1 \text{ միավոր արտադրանքի} \\ \text{թողարկման համար} \\ \text{բոլոր ռեսուրսների ծախսը} \\ \text{արժեքային արտահայտությամբ} \end{array} \right) \geq \left(\begin{array}{c} j \text{ տեսակի } 1 \text{ միավոր} \\ \text{արտադրանքի } g \\ \text{շահույթը} \end{array} \right) \quad (2.41')$$

$j = \overline{1, n},$

իսկ (2.42) սահմանափակումներն արտահայտում են.

$$\left(\begin{array}{c} i - \text{րդ ռեսուրսի} \\ 1 \text{ միավորի արժեքը} \end{array} \right) \geq 0 \quad i = \overline{1, m} : \quad (2.42')$$

Ըստ այդմ, երկակի խնդրի նպատակն է որոշել բոլոր y_i ռեսուրսների 1 միավորի արժեքներն (գներն) այնպես, որ ռեսուրսների b_i պաշարների, a_{ij} տեխնոլոգիական նորմաների և j տեսակի միավոր արտադրանքից c_j շահույթի ցուցանիշների դեպքում ռեսուրսների ձեռքբերման հետ կապված ծախսերը լինեն նվազագույնը:

Այժմ ձևակերպենք երկակի խնդիրն ամբողջությամբ:

Ենթադրենք՝ A կազմակերպությունը (որի մասին խոսվում է ուղիղ խնդրում) կարող է ինչպես արտադրություն ծավալել, այնպես էլ վաճառել իր տնօրինած ռեսուրսները: Միաժամանակ, B կազմակերպությունը ցանկանում է ձեռք բերել ռեսուրսների որոշ ծավալը և A կազմակերպությանն առաջարկում է 1 միավորի դիմաց y_i գին՝ $i = \overline{1, m}$: Ինչպիսի՞ անառարկելի, այսինքն՝ նաև A կազմակերպության համար ընդունելի գին պետք է առաջարկի B կազմակերպու-

թյունը ռեսուրսներից յուրաքանչյուրի միավորի դիմաց, որ դրանց ձեռքբերման ծախսերը լինեն նվազագույնը:

Այստեղ պետք է հաշվի առնել, որ ռեսուրսների դիմաց B կազմակերպության վճարը չի կարող զիջել (պակաս լինել, քան) A կազմակերպության շահույթը՝ նշված ռեսուրսներով սեփական արտադրություն իրականացնելիս: Սույն պայմանի տեղի ունենալն արտահայտում է երկակիության I թեորեմը:

Վերջինիս համաձայն՝ երկու խնդիրները, միաժամանակ, ունեն լավագույն լուծումներ, ընդ որում, եթե ռեսուրսների վաճառքի գործարքը տեղի ունենա, ապա B կազմակերպության նվազագույն ծախսերը հավասար կլինեն A կազմակերպության արտադրական գործունեությունից շահույթի առավելագույն մակարդակին:

Երկակի մոդելի (2.41) պայմանն ապահովում է գների անառարկելի լինելը: Մասնավորապես՝ եթե որևէ j արտադրատեսակի

համար տեղի ունենա
$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j < 0$$
 պայմանը, այն է՝ j արտա-

դրատեսակի 1 միավորի թողարկման համար անհրաժեշտ ռեսուրսների վաճառքից A կազմակերպության ստացված գումարը փոքր է նույն՝ j արտադրատեսակի 1 միավորի արտադրության դեպքում կազմակերպության շահույթից, ապա ռեսուրսների վաճառքի գործարք տեղի չի ունենա:

2.3. ՕԲՅԵԿՏԻՎՈՐԵՆ ՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԸ ԳԾԽ-ՈՒՄ

Ընդհանուր առմամբ, երկակի խնդրի Y^* լավագույն լուծման $y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*$ բաղադրիչներն ընդունված է անվանել ուղիղ խնդրի **օբյեկտիվորեն պայմանավորված (ՕՊ)** կամ **օպտիմալ գնահատականներ** (հասկացություն, որն առաջին անգամ կիրառել է Լ. Կանտորովիչը): Տնտեսագիտական խնդիրներում ՕՊ գնահատականներն ունեն ներքին **գների** իմաստ այն բոլոր ռեսուրսների համար, որոնք հանդես են գալիս ուղիղ ԳԾ խնդրի սահմանափակումների աջ մասերում:

Երկակիության I թեորեմից հետևում է, որ, եթե ԳԾ խնդիրը վերածվող չէ և $F(X^*)$ -ը $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ նպատակային ֆունկցիայի առա-

վելագույն (այլ կերպ ասած՝ օպտիմալ) արժեքն է տրված սահմանափակումների պայմաններում, ապա.

$$\frac{\partial F(X^*)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = \overline{1; m} : \quad (2.43)$$

Այսպիսով, զուտ մաթեմատիկական բովանդակությունից ելնելով, օպտիմալ գնահատականները որոշում են ԳԾ խնդրի սահմանափակումների b_i ազատ անդամների ազդեցությունը նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալ արժեքի վրա: Այլ կերպ ասած, $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ լավագույն լուծման հետ մեկտեղ հաշվարկելով նաև դրա հետ կապված՝ $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ օպտիմալ գնահատականները, հնարավոր է որոշել առանձին ռեսուրսների համեմատական կարևորությունը խնդրում առաջադրված նպատակի, տվյալ դեպքում՝ $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ առավելագույնի (մաքսիմումի) ձեռքբերման համար:

Նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալ արժեքի փոփոխությունը որևէ b_i ռեսուրսի փոքր փոփոխության դեպքում հավասար է՝ $F(\tilde{X}) - F(X^*) = y_i(\tilde{b}_i - b_i)$, որտեղ $\tilde{b}_i$ -ն i -րդ ռեսուրսի նոր քանակությունն է, իսկ $\tilde{X}$ -ը՝ ռեսուրսների նոր պաշարներին համապատասխանող լավագույն լուծումը:

Եթե ուղիղ խնդրի լավագույն լուծումը վերածվող է, այն է՝ պարունակում է m -ից քիչ դրական բաղադրիչներ, ապա յուրաքանչյուր ռեսուրսին, ընդհանուր առմամբ, կհամապատասխանի երկու գնահատական. մեկը i -րդ ռեսուրսի պաշարի նվազման դեպքում՝

$$y_{i-}^* = \frac{\partial F(X^*)}{\partial b_{i-}}, \quad \text{որը ներկայացնում է } X^* \text{ կետում } \sum_{j=1}^n c_j x_j \text{ նպատա-}$$

կային ֆունկցիայի ձախակողմյան ածանցյալն ըստ համապատասխան ռեսուրսի, իսկ մյուսը, ռեսուրսի պաշարի ավելացման դեպքում, աջակողմյան ածանցյալն է՝ $y_{i+}^* = \frac{\partial F(X^*)}{\partial b_{i+}}$, որտեղ՝ $y_{i-}^* \geq y_i^* \geq y_{i+}^*$:

Նման գնահատականներն անվանում են **մարժինալ** կամ **սահմանային**:

Ընդհանուր առմամբ, ՕՊ գնահատականները ռեսուրսների և բողարկման **դեֆիցիտային** կամ ոչ դեֆիցիտային **լինելու չափանիշ են**: Դրանք կարող են կիրառվել որպես գործիք ընդհանուր օպտիմումին հասնելու տեսանկյունից՝ առանձին արտադրանդանակների (տեխնոլոգիական եղանակների) **արդյունավետությունը** որոշելու համար:

2.4. ԳԾ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՕՊ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐՈՎ

ՕՊ գնահատականները լավագույնս կիրառվում են ԳԾ խլածման տնտեսագիտական վերլուծության ժամանակ: Այստեղ ԳԾ խլածումն ասելով նկատի ունենք լավագույն լուծումը և նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալ արժեքը:

Նախ՝ թվարկենք երկակի ՕՊ գնահատականների մի քանի կարևոր հատկություններ.

1. Երկակի ՕՊ գնահատականները ռեսուրսների և արտադրանքի դեֆիցիտային (ոչ դեֆիցիտային) լինելու չափանիշ (ցուցանիշ) են՝ տվյալ խնդրի առումով:

Իրոք, հաշվի առնելով, որ $y_i^* = \frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i}$, ապա y_i^* -ը i -րդ ռեսուրսի ՕՊ գնահատականն է, և որքան մեծ է y_i^* -ը, այդքան էլ մեծ է i -րդ ռեսուրսի դեֆիցիտայնությունը: Ոչ դեֆիցիտային ռեսուրսի համար՝ $y_i^* = 0$:

2. ՕՊ գնահատականները նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալ արժեքի վրա սահմանափակումների ազատ անդամների փոփոխությունների ազդեցության ցուցանիշ են:

$$\Delta b_i \text{ փոքր փոփոխությունների դեպքում } \Delta F_{\max} \approx \sum_{i=1}^m y_i^* \Delta b_i :$$

Հետևաբար՝ գործնական հետաքրքրություն է ներկայացնում ազատ անդամների փոփոխության այն ստորին և վերին սահմանների որոշումը, երբ ՕՊ գնահատականներն անփոփոխ են:

3. ՕՊ գնահատականներն առանձին արտադրատեսակների թողարկման նպատակահարմարության և արդյունավետության ցուցանիշ են:

Ըստ այդմ, լավագույն լուծման մեջ կարող է ընդգրկվել միայն այն j -րդ արտադրատեսակը, որի համար տեղի ունի հետևյալ պայմանը.

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* < c_j :$$

ԳԾ խնդիրների վերլուծության տեսանկյունից, կարևոր նշանակություն ունի $A^{-1} = \|d_{ij}\|$ մատրիցը, որը լավագույն լուծման հենքը

կազմող անհայտների գործակիցներից բաղկացած $A = \|a_{ij}\|$ մատրիցի հակադարձն է:

Ստորև ներկայացվող տնտեսագիտական վերլուծությունը ռեսուրսների օպտիմալ օգտագործման խնդրի օրինակով է, սակայն առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող է կիրառվել որևէ այլ ԳԾ խնդրի տնտեսագիտական վերլուծության համար:

Նկատի ունենանք, որ տնտեսագիտական վերլուծության համար երկակի ՕՊ գնահատականները կիրառելի են միայն այն դեպքում, երբ ռեսուրսների պաշարները փոփոխվում են որոշակի սահմաններում, այլ կերպ ասած՝ միջակայքում, որն անվանվում է **գնահատականների կայունության թույլատրելի միջակայք**:

Մասնավորապես՝ i -րդ սահմանափակման նկատմամբ գնահատականների կայունության միջակայքը հետևյալն է.

$$[b_i - \Delta b'_i; b_i + \Delta b''_i], \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.44)$$

որտեղ $\Delta b'_i$ -ը՝ i -րդ ռեսուրսի պաշարի կրճատման, իսկ $\Delta b''_i$ -ը՝ ավելացման առավելագույն մեծությունն է, որոնք հաշվարկվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$\Delta b'_i = \min_j \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\}, \quad \Delta b''_i = \left| \max_j \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\} \right|: \quad (2.45)$$

Լավագույն լուծման մեջ նոր j արտադրատեսակի ընդգրկման նպատակահարմարությունը գնահատվում է Δ_j բնութագրիչով.

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j: \quad (2.46)$$

Եթե $\Delta_j < 0$, ապա տվյալ արտադրատեսակն ընդգրկելը նպատակահարմար է, իսկ $\Delta_j > 0$ դեպքում՝ նպատակահարմար չէ:

$\Delta_j = 0$ դեպքում լավագույն լուծման մեջ տվյալ արտադրատեսակի ընդգրկումը չի փոփոխում նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալ արժեքը, հետևաբար՝ նպատակահարմար կարող է լինել, օրինակ, արտադրանքի տեսականին բազմազանեցնելու կամ թարմացնելու տեսակետից:

Դիցուք՝ հնարավոր է ձեռք բերել i -րդ ռեսուրսի լրացուցիչ քանակություն $\hat{\Delta b}_i$ չափով: Այդ մեծությունը երկակի գնահատականնե-

րի կայունության միջակայքում է: Ռեսուրսի գինը p_i է, հետևաբար՝
 շահույթի հավելաճն է. $\Delta F_{i \max} = \Delta \hat{b}_i \cdot y_i^*$, մինչդեռ ռեսուրսի ձեռք-
 բերման ծախսերը՝ $\Delta p_i = \Delta \hat{b}_i \cdot p_i$: Ռեսուրսի լրացուցիչ քանակի
 ձեռքբերումն արդյունավետ է, եթե այն ապահովում է լրացուցիչ
 (հավելյալ) շահույթ, այսինքն՝ $\Delta c_i > 0$, որտեղ.

$$\Delta c_i = \Delta F_{i \max} - \Delta p_i = \Delta \hat{b}_i (y_i^* - p_i): \quad (2.47)$$

Վերոհիշյալը կիրառենք ստորև բերվող խնդրի օրինակով:

Ենթադրենք՝ 4 տեսակի արտադրանք, համապատասխանա-
 բար՝ Ա1, Ա2, Ա3 և Ա4 թողարկելու համար օգտագործվում է ռե-
 սուրսների 3 տեսակ, համապատասխանաբար՝ Ռ1, Ռ2 և Ռ3: Ռե-
 սուրսների պաշարները, յուրաքանչյուր արտադրատեսակի 1 միա-
 վորի համար ռեսուրսների սպառման տեխնոլոգիական նորմաները
 և իրացումից ստացվող շահույթի գործակիցները ներկայացված են
 աղյուսակ 2.1-ում:

Աղյուսակ 2.1

<i>Ռեսուրսի տեսակ</i>	<i>Ռեսուրսի պաշար</i>	<i>Սպառման նորմա՝ միավոր արտադրատեսակի համար</i>			
		<i>Ա1</i>	<i>Ա2</i>	<i>Ա3</i>	<i>Ա4</i>
Ռեսուրս 1	240	2	1	1	3
Ռեսուրս 2	60	1	0	2	1
Ռեսուրս 3	300	1	2	1	0
Շահույթ		4	2	3	5

Պահանջվում է.

- ա) գտնել ուղիղ և երկակի խնդիրների լավագույն լուծումները,
 բ) որոշել առավելագույն շահույթի փոփոխությունը ռեսուրս-
 ների պաշարների տրված փոփոխությունների դեպքում՝
 $\Delta b_1 = -10$, $\Delta b_2 = 60$, $\Delta b_3 = 30$, գնահատել տվյալ փոփո-
 խությունների առանձին և համատեղ ազդեցությունները
 շահույթի առավելագույն մակարդակի վրա,
 գ) գնահատել լրացուցիչ՝ 5-րդ արտադրատեսակի թողարկման
 նպատակահարմարությունը, եթե ռեսուրսների ծախսման
 նորմաները համապատասխանաբար՝ 2, 4, 2 են, իսկ շա-
 հույթը՝ 15 միավոր,

դ) գնահատել 3-րդ տեսակի ռեսուրսի լրացուցիչ՝ 100 միավորի ձեռքբերման նպատակահարմարությունը $p_3 = 0.5$

զնով:

Լուծում:

Խնդրի մաթեմատիկական մոդելը հետևյալն է.

$$F(X) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \max, \quad (2.48)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 240 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 60 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 300 \end{cases}, \quad (2.49)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 4): \quad (2.50)$$

ա) Լուծելով խնդիրը սիմպլեքս ալգորիթով՝ կստանանք վերջնական աղյուսակը՝ 2.2-ը.

Աղյուսակ 2.2

	$-x_4$	$-x_5$	$-x_7$	$-x_6$	1
x_1	$\frac{11}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	60
x_2	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	120
x_3	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
F	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	480

Նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալ արժեքը և լավագույն լուծումը հետևյալն են.

$$F(X^*)_{\max} = 480, \quad X^* = (60, 120, 0, 0):$$

Հաշվի առնելով ուղիղ և երկակի խնդիրների փոփոխականների փոխհամապատասխանությունը՝ սիմպլեքս վերջին աղյուսակից դուրս գրենք նաև երկակի խնդրի լավագույն լուծումը, այն է՝ ՕՊ գնահատականները.

Աղյուսակ 2.3

		y_7	y_1	y_3	y_2	φ
		$-x_4$	$-x_5$	$-x_7$	$-x_6$	1
y_4	x_1	$\frac{11}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	60
y_5	x_2	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	120
y_6	x_3	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
	F	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	480

$$\varphi(Y^*)_{\min} = 480, Y^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right):$$

ՕՊ գնահատականները ցույց են տալիս, որ առավել դեֆիցիտայինն առաջին ռեսուրսն է, քանի որ վերջինիս գնահատականն ամենամեծն է՝ $y_1^* = \frac{8}{5}$, իսկ համեմատաբար ոչ դեֆիցիտայինը եր-

րորդ ռեսուրսն է՝ $y_3^* = \frac{1}{5}$:

Որոշենք ՕՊ գնահատականների կայունության միջակայքերն ըստ առանձին ռեսուրսների պաշարի՝ (2.44) և (2.45) բանաձևերով: Նշված բանաձևերը կիրառելու համար պետք են d_{ij} գործակիցների արժեքները:

Օգտվենք վերջին սիմպլեքս աղյուսակից (աղյուսակ 2.3), որի տողերին համապատասխանող x_1, x_2, x_3 -ը՝ խնդրի հենքային փոփոխականներն են: (2.49) համակարգից դուրս գրենք հենքային փոփոխականներին համապատասխանող գործակիցների մատրիցը.

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

որին համապատասխանող հակադարձ մատրիցը դուրս գրենք սիմ-պլեքս վերջին աղյուսակից (աղյուսակ 2.3).

$$A^{-1} = \|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} x_5 & x_6 & x_7 \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} : \quad (2.52)$$

Ունենալով A^{-1} , որոշենք ՕՊ գնահատականների կայունության միջակայքն առաջին ռեսուրսի պաշարի դեպքում: (2.45) բանաձևերից կստանանք.

$$\Delta b'_1 = \min_j \left\{ \frac{x_j^*}{d_{1j}} \right\} = \min \left\{ \frac{60}{\frac{4}{5}} \right\} = 75,$$

$$\Delta b''_1 = \left| \max_j \left\{ \frac{x_j^*}{d_{1j}} \right\} \right| = \left| \max_j \left\{ \frac{x_2^*}{d_{12}}; \frac{x_3^*}{d_{13}} \right\} \right| = \left| \max_j \left\{ \frac{120}{-\frac{1}{5}}; \frac{0}{-\frac{2}{5}} \right\} \right| = 0 :$$

Փնտրվող միջակայքը, (2.44) բանաձևի համաձայն, կլինի.

$$[b_1 - \Delta b'_1; b_1 + \Delta b''_1] = [240 - 75; 240 + 0] = [165; 240]:$$

Նույնպես կստանանք մնացած երկու ռեսուրսների պաշարների ՕՊ գնահատականների կայունության միջակայքերը. երկրորդ ռեսուրսի համար՝ [60, 360], երրորդ ռեսուրսի համար՝ [300, 450]:

բ) Հարցադրմանը պատասխանելու համար նախ՝ պետք է համոզվել, որ ռեսուրսների փոփոխությունները ՕՊ գնահատականների կայունության միջակայքում են:

Եթե $\Delta b_1 = -10$, ապա առաջին ռեսուրսի պաշարը $240 - 10 = 230$ միավոր է, հետևաբար՝ ՕՊ գնահատականները կայուն են: Նույն-պես.

$\Delta b_2 = 60$, հետևաբար՝ 2-րդ ռեսուրսի պաշարն է՝ $60 + 60 = 120$,

$\Delta b_3 = 30$, հետևաբար՝ 3-րդ ռեսուրսի պաշարն է՝ $300 + 30 = 330$:

Հաշվի առնելով, որ ռեսուրսների վերոհիշյալ փոփոխությունները ՕՊ գնահատականների կայունության միջակայքում են, ուստի դրանց առանձին ազդեցությունը շահույթի առավելագույն (օպտիմալ) մակարդակի վրա կկազմի.

$$\Delta F_{1\max} = \Delta b_1 \cdot y_1^* = (-10) \cdot \frac{8}{5} = -16,$$

$$\Delta F_{2\max} = \Delta b_2 \cdot y_2^* = 60 \cdot \frac{3}{5} = 36,$$

$$\Delta F_{3\max} = \Delta b_3 \cdot y_3^* = 30 \cdot \frac{1}{5} = 6:$$

Համատեղ ազդեցությունը կկազմի.

$$\Delta F_{\max} = \Delta F_{1\max} + \Delta F_{2\max} + \Delta F_{3\max} = -16 + 36 + 6 = 26:$$

զ) Չնահատենք լրացուցիչ՝ 5-րդ արտադրատեսակի թողարկման նպատակահարմարությունը: (2.46) բանաձևի համաձայն.

$$\Delta_5 = \sum_{i=1}^3 a_{i5} y_i^* - c_5 = 2 \cdot \frac{8}{5} + 4 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} - 15 = -9 < 0:$$

Քանի որ շահույթը գերազանցում է ծախսերը, ուստի 5-րդ արտադրատեսակի թողարկումը շահավետ է, հետևաբար՝ նպատակահարմար ($x_5^* > 0$):

դ) Չնահատենք 3-րդ տեսակի ռեսուրսի լրացուցիչ 100 միավորի ձեռքբերման նպատակահարմարությունը $p_3 = 0.5$ գնով:

Հաշվի առնելով, որ 3-րդ ռեսուրսի ավելացումը $\Delta \hat{b}_3 = 100$ միավորով ՕՊ գնահատականների կայունության միջակայքում է, ուստի.

$$\Delta F_{3\max} = \Delta \hat{b}_3 \cdot y_3^* = 100 \cdot \frac{1}{5} = 20:$$

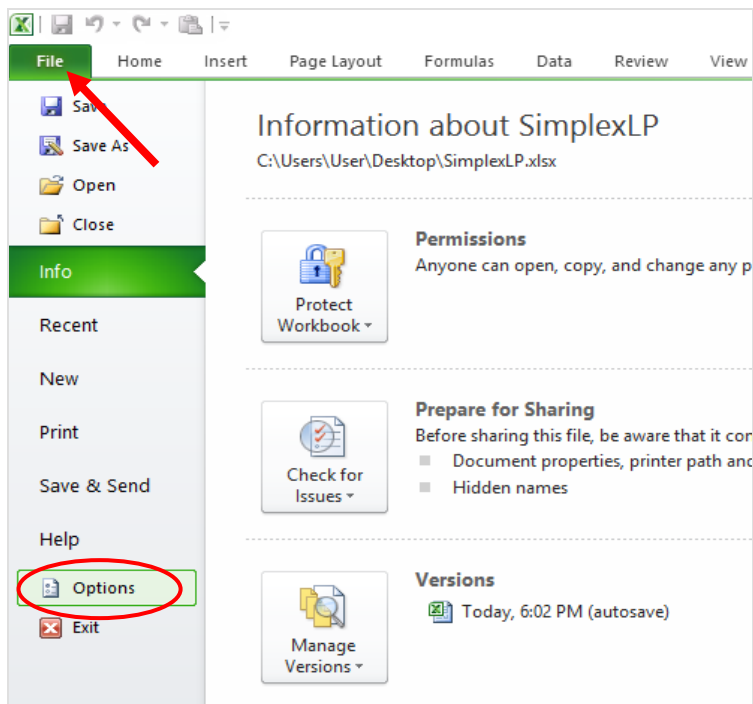
Միաժամանակ, 3-րդ ռեսուրսի՝ լրացուցիչ 100 միավորի ձեռքբերման ծախսերը կազմում են.

$$\Delta p_3 = \Delta \hat{b}_3 \cdot p_3 = 100 \cdot 0.5 = 50:$$

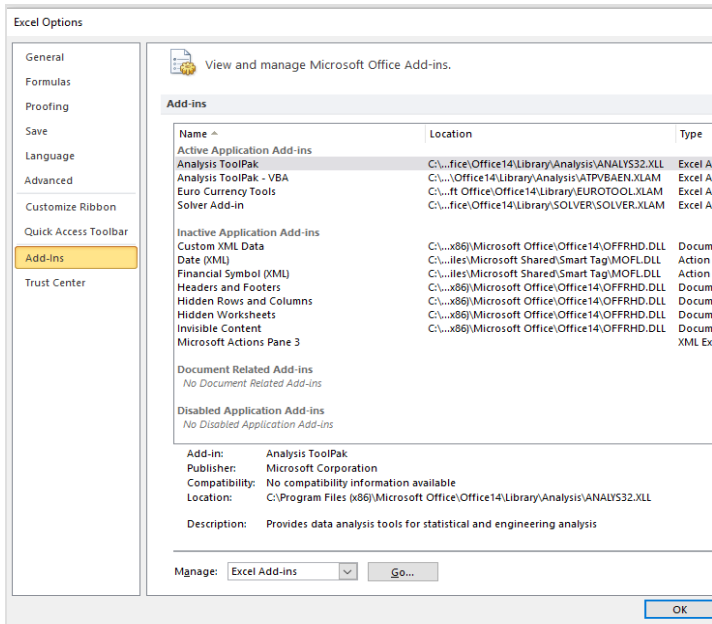
(2.47) բանաձևի համաձայն՝ $\Delta c_3 = \Delta F_{3\max} - \Delta p_3 = 20 - 50 = -30 < 0$ լրացուցիչ շահույթի մեծությունը բացասական է, ուստի 3-րդ ռեսուրսի ձեռքբերումը նպատակահարմար չէ:

ՕՊ գնահատականները, ինչպես նաև դրանց կայունության թույլատրելի միջակայքերը հնարավոր է հաշվարկել նաև Excel ծրագրային փաթեթի Solver հավելվածով:

Solver հավելվածը MS Excel 2010-ում ներբեռնելու համար կատարեք գծապատկեր 2.1-ում նկարագրված գործողությունները. Excel միջավայրում ստեղծված աշխատանքային էջում սեղմեք File / Options, այնուհետև գծապատկեր 2.2-ի օրինակով՝ Add-Ins, ընտրեք Manage Excel Add-Ins և սեղմեք Go ստեղծը:

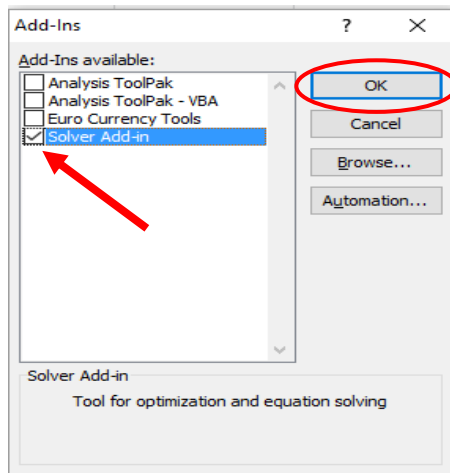


Գծապատկեր 2.1



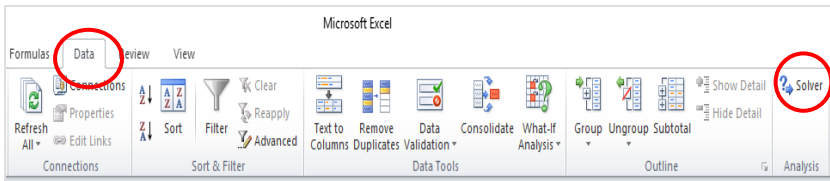
Պատկեր 2.2

Բացված պատուհանում ընտրեք Solver Add-in և սեղմեք OK (պատկեր 2.3):



Պատկեր 2.3

Solver հավելվածը տեղակայված է Data աշխատանքային էջում (գծապատկեր 2.4):



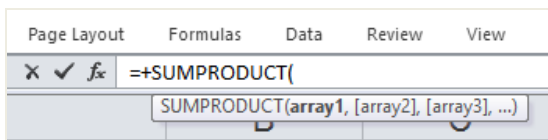
Գծապատկեր 2.4

Ռեսուրսների օպտիմալ օգտագործման խնդիրը Solver հավելվածով լուծելու համար աշխատանքային էջում անհրաժեշտ է արտացոլել խնդրի հայտնի մեծությունները և մուտքագրել նպատակային ֆունկցիայի բանաձևը, ինչպես գծապատկեր 2.5-ում է: Ռեսուրսների օպտիմալ օգտագործման խնդրի հայտնի մեծությունները աղյուսակ 2.1-ում են, իսկ (2.48)-(2.50) պայմանները ներկայացնում են խնդրի մոդելը:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		x1	x2	x3	x4		
3							
4	F(x)	4	2	3	5	=SUMPRODUCT(\$B\$3:\$E\$3,B4:E4)	
5	Սահմանափակում 1	2	1	1	3		240
6	Սահմանափակում 2	1	0	2	1		60
7	Սահմանափակում 3	1	2	1	0		300
8							

Գծապատկեր 2.5

SUMPRODUCT ֆունկցիայի հետ աշխատելիս պետք է ուշադրություն դարձնել array1 և array2 զանգվածները տարանջատող նշանին: Ներկայացվող օրինակում դա «,» է (նկար 2.6): Միշտ պետք է ընտրել ծրագրով առաջարկվող տարբերակ.



Գծապատկեր 2.6

Անհայտների վանդակներն ամրագրելու համար պետք է օգտագործել f4 ստեղծը: Դրա համար SUMPRODUCT(B3:E3,B4:E4) բանաձևում B3 վանդակի անվան մոտ մեկ անգամ պետք է սեղմել f4՝ ստանալով SUMPRODUCT(\$B\$3:E3,B4:E4), որից հետո մկնիկը տեղափոխել E3-ի մոտ, սեղմել f4՝ ստանալով SUMPRODUCT(\$B\$3:\$E\$3,B4:E4) (գծապատկեր 2.5): Այնուհետև F5, F6 և F7 վանդակներում պետք է մուտքագրել սահմանափակումների բանաձևերը: Դրա համար բավական է հիշյալ վանդակների վրա տարածել F4 վանդակում մուտքագրված բանաձևը (գծապատկեր 2.7):

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		x1	x2	x3	x4		
3							
4		F(x)	4	2	3	5	
5		Սահմանափակում 1	2	1	1	3	240
6		Սահմանափակում 2	1	0	2	1	60
7		Սահմանափակում 3	1	2	1	0	300
8							

Գծապատկեր 2.7

Երբ նախապատրաստական գործողություններն ավարտված են, պետք է բացել Solver-ը և լրացնել նպատակային ֆունկցիային և խնդրի անհայտներին համապատասխանող վանդակները, ինչպես գծապատկեր 2.8-ում է:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		x1	x2	x3	x4		
3							
4		F(x)	4	2	3	5	
5		Սահմանափակում 1	2	1	1	3	240
6		Սահմանափակում 2	1	0	2	1	60
7		Սահմանափակում 3	1	2	1	0	300
8							

Գծապատկեր 2.8

Ստղելի սահմանափակումները մուտքագրվում են Add ստեղծի միջոցով (գծապատկեր 2.9 և 2.10):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		x1	x2	x3	x4							
3												
4		F(x)	4	2	3	5	-					
5	Սահմանափակում 1	2	1	1	3	-	240					
6	Սահմանափակում 2	1	0	2	1	-	60					
7	Սահմանափակում 3	1	2	1	0	-	300					
8												

Add Constraint

Cell Reference: \$F\$5

Constraint: <= \$G\$5

OK Add Cancel

Գծապատկեր 2.9

Այնուհետև պետք է նշել փոփոխականների ոչ բացասական լինելը (Make Unconstrained Variables Non-Negative), ընտրել ԳՇԽ լուծման համար նախատեսված սիմպլեքս եղանակը (Simplex LP) և սեղմել Solve ստեղծը (գծապատկեր 2.10):

Solver Parameters

Set Objective: \$F\$4

To: ☒ Max ☐ Min ☐ Value Of: 0

By Changing Variable Cells: \$B\$3:\$E\$3

Subject to the Constraints:

\$F\$5 <= \$G\$5
\$F\$6 <= \$G\$6
\$F\$7 <= \$G\$7

☒ Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method: Simplex LP

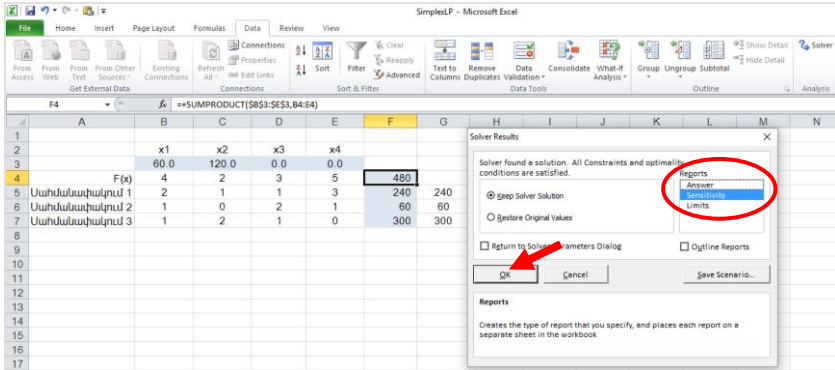
Solving Method

Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Solve

Գծապատկեր 2.10

Solver Results պատուհանում ՕՊ զնահատականները և ռեսուրսների պաշարների համար դրանց կայունության միջակայքերը ստանալու համար պետք է ընտրել Sensitivity հաշվետվությունը և սեղմել OK (գծապատկեր 2.11):



Գծապատկեր 2.11

Գծապատկեր 2.12-ում ներկայացված են խնդրի լավագույն լուծումը և նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալ արժեքը. $X^* = (60, 120, 0, 0)$ և $F_{\max} = 480$: Գծապատկեր 2.13-ում Sensitivity հաշվետվության արդյունքներն են: Սասնավորապես՝ Shadow Price սյունը ներկայացնում է խնդրի ՕՊ գնահատականները. $Y^* = (1.6, 0.6, 0.2) = (\frac{8}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$: Allowable Increase սյունը ցույց է տալիս յուրաքանչյուր ռեսուրսի պաշարի ավելացման, իսկ Allowable Decrease սյունը՝ դրա նվազման առավելագույն մեծությունը: Արդյունքում ստանում ենք ռեսուրսների պաշարների փոփոխության՝ մեզ արդեն ծանոթ միջակայքերը. $[240 - 75; 240 + 0] = [165; 240]$, $[60 - 0; 60 + 300] = [60; 360]$ և $[300 - 0; 300 + 150] = [300; 450]$:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		x1	x2	x3	x4		
3		60.0	120.0	0.0	0.0		
4		F(x)	4	2	3	5	480
5	Սահմանափակում 1	2	1	1	3		240
6	Սահմանափակում 2	1	0	2	1		60
7	Սահմանափակում 3	1	2	1	0		300

Գծապատկեր 2.12

Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report						
Worksheet: [SimplexLP.xlsx]Resources						
Variable Cells						
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$3	x1	60	0	4	0.5	0.2
\$C\$3	x2	120	0	2	0.5	0.3
\$D\$3	x3	0	0	3	0.7	1
\$E\$3	x4	0	-0.4	5	0.4	1E+30
Constraints						
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$F\$5	Սահմանափակում 1	240	1.6	240	0	75
\$F\$6	Սահմանափակում 2	60	0.6	60	300	0
\$F\$7	Սահմանափակում 3	300	0.2	300	150	0

Գծապատկեր 2.13

3.1. ՏՐԱՆՍՊՈՐՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԴՐՎԱԾԸ

Դիցուք՝ տրված են m արտադրական կետեր, որոնցից յուրաքանչյուրում արտադրվում է համասեռ կամ փոխադարձ փոխարինվող արտադրանք, և n սպառման կետեր, որոնք այդ արտադրանքի նկատմամբ որոշակի պահանջարկ են ներկայացնում: Նշանակենք i -ով արտադրական, իսկ j -ով՝ սպառման կետերի ինդեքսները, որտեղ՝ $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$:

Ենթադրենք՝ հայտնի են.

- յուրաքանչյուր արտադրական կետի առաջարկը՝ a_i ,
 $i = \overline{1, m}$, $a_i > 0$,
- յուրաքանչյուր սպառման կետի պահանջարկը՝ b_j ,
 $j = \overline{1, n}$, $b_j > 0$,
- յուրաքանչյուր՝ i -րդ արտադրական կետից դեպի յուրաքանչյուր՝ j -րդ սպառման կետ միավոր արտադրանքի տեղափոխման տրանսպորտային ծախսը՝ c_{ij} , $i = \overline{1, m}$,
 $j = \overline{1, n}$, $c_{ij} > 0$:

Վերոհիշյալ պայմաններում պահանջվում է կազմել արտադրանքի տեղափոխման այնպիսի տարբերակ, որը նվազագույն գումարային տրանսպորտային ծախսերով կապահովի սպառման կետերի պահանջարկի բավարարումն արտադրական կետերում առկա արտադրանքի իրացման հաշվին:

Այլ կերպ ասած, պահանջվում է որոշել, թե որ արտադրական կետից դեպի որ սպառման կետ արտադրանքի քանի միավոր պետք է տեղափոխել, որպեսզի յուրաքանչյուր սպառման կետ արտադրանք ստանա առնվազն իր ներկայացրած պահանջարկի չափով, յուրաքանչյուր արտադրական կետ ուղարկի իր թողարկած արտադրանքի չափով, և տեղափոխման գումարային տրանսպորտային ծախսերը լինեն նվազագույնը:

Նկատենք, որ, ելնելով տնտեսագիտական խնդրի որոշակի առանձնահատկություններից, «տրանսպորտային ծախսեր» կամ «ծախքեր» հասկացությունը կարող է փոխարինվել այլ ցուցանիշներով, ինչպես օրինակ՝ տեղափոխման սակագներ, հեռավորություն, ժամանակ, վառելիքի ծախս, ինքնարժեք և այլն: Ուստի դա առավելապես պայմանական բնույթի է և կարող է չհամընկնել իր բուն տնտեսագիտական իմաստի հետ:

Նշանակենք x_{ij} -ով i -րդ արտադրական կետից մինչև j -րդ սպառման կետ տեղափոխվող արտադրանքի քանակը: Եթե i -րդ արտադրական կետից դեպի j -րդ սպառման կետ միավոր արտադրանքի տեղափոխման տրանսպորտային ծախսը C_{ij} միավոր է, ապա, ծախսերի ֆունկցիայի գծային լինելու ենթադրության պայմանով, x_{ij} միավորների տեղափոխման տրանսպորտային ծախսը $C_{ij}x_{ij}$ միավոր է: Այս դեպքում յուրաքանչյուր i -րդ արտադրական կետից բոլոր n սպառման կետերի ուղղությամբ $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ ծավալներով արտադրանքի տեղափոխման գումարային տրանսպորտային ծախսը $\sum_{j=1}^n C_{ij}x_{ij}$ միավոր է: Յետևաբար՝ բոլոր m արտադրական կետերից դեպի բոլոր n սպառման կետեր արտադրանքի տեղափոխման գումարային տրանսպորտային ծախսերը կլինեն.

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} :$$

Քննարկվող խնդրի դրվածքից ելնելով՝ պարզ է, որ յուրաքանչյուր i -րդ արտադրական կետից բոլոր n ուղղություններով տեղափոխվող արտադրանքի գումարային ծավալը, ընդհանուր առմամբ, չի կարող գերազանցել արտադրական կետի առաջարկը.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad i = \overline{1, m},$$

մինչդեռ յուրաքանչյուր j -րդ սպառման կետ բոլոր m արտադրական կետերից ուղարկվող արտադրանքի ծավալը չպետք է պակաս լինի սպառման կետի պահանջարկից.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad j = \overline{1, n}:$$

Վերոհիշյալին ավելացնելով տեղափոխվող արտադրանքի ծավալի ոչ բացասական լինելու բնական պայմանը՝

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

կստանանք տրանսպորտային խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելն **ընդհանուր դեպքում**.

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}: \quad (3.4)$$

Այսպիսով, մաթեմատիկական ձևակերպմամբ, տրանսպորտային խնդիրը հանգում է (3.1) ֆունկցիայի նվազագույն արժեքի որոնմանը՝ (3.2)–(3.4) պայմանների դեպքում:

Դժվար չէ նկատել, որ (3.2) և (3.3) պայմաններով կազմված համակարգի համատեղելիությունը ենթադրում է, որ ամբողջական կամ գումարային պահանջարկը չի կարող գերազանցել ամբողջական առաջարկի մեծությունը՝ $\sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{i=1}^m a_i$, այլապես, եղած առա-

ջարկով հնարավոր չի լինի բավարարել ներկայացված պահանջակը:

Մյուս կողմից, (3.1) ծախսերի ֆունկցիայի նվազագույն արժեքի որոնման տրամաբանությունը հուշում է, որ լավագույն լուծման դեպքում (3.3) պայմանը տեղի կունենա որպես հավասարություն՝ ապահովելով պահանջարկի բավարարումը՝ սպառման կետի ներկայացրած հայտին համապատասխան, այլ ոչ թե գերազանցելով այն:

Այս իմաստով, առավել տարածված է տրանսպորտային խնդրի՝ Զիչկոյի կամ **դասական** մոդելը, որը (3.1)–(3.4) խնդրի մասնավոր դեպքն է:

Վերոհիշյալ նշանակումների պայմաններում Զիչկոյի մոդելում պահանջվում է կազմել արտադրանքի տեղափոխման այնպիսի տարբերակ, որը նվազագույն գումարային տրանսպորտային ծախ-

սերով կապահովի սպառման կետերի պահանջարկի **ամբողջական** բավարարումը՝ արտադրական կետերում առկա արտադրանքի **լրիվ** իրացման հաշվին: Այլ կերպ ասած, պետք է որոշել բոլոր արտադրական կետերից դեպի բոլոր սպառման կետեր ուղղվող արտադրանքի ծավալներն այնպես, որ յուրաքանչյուր սպառման կետ արտադրանք ստանա իր ներկայացրած պահանջարկի չափով, յուրաքանչյուր արտադրական կետ իրացնի իր թողարկած ողջ արտադրանքը և արտադրանքի տեղափոխման գումարային տրանսպորտային ծախսերը լինեն նվազագույնը:

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.7)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}: \quad (3.8)$$

(3.5)-(3.8) պայմաններով զԾ խնդիրն անվանենք **T խնդիր**:

Ինչպես գիտենք, զԾ խնդիրները միշտ չէ, որ ունեն լավագույն լուծում, և տրանսպորտային խնդիրը, որպես զԾ խնդիր, բացառությամբ չէ: Որոշման են (3.5)-(3.8) խնդրի լավագույն լուծման գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

T խնդրի լավագույն լուծման գոյության թեորեմը

Որպեսզի T խնդիրն ունենա լավագույն լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա հաշվեկշռվածության պայմանը.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (3.9)$$

այն է՝ գումարային առաջարկը հավասար լինի գումարային պահանջարկին:

Ապացույց:

Անհրաժեշտություն. Ենթադրենք՝ տրված է T խնդրի որևէ լավագույն լուծում: Պահանջվում է ապացուցել $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ պայմանի իրավացի լինելը լավագույն լուծման համար:

Դիցուք՝ $X^* = \|x_{ij}^*\|_{m,n}$ մատրիցը T խնդրի լավագույն լուծումն է, որը բավարարում է (3.6), (3.7) պայմանները.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^* = a_i \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij}^* = b_j \quad j = \overline{1, n}: \quad (3.11)$$

Գումարելով (3.10) համակարգի բոլոր m և (3.11)-ի բոլոր n պայմանները՝ կունենանք.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* = \sum_{i=1}^m a_i, \quad (3.12)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij}^* = \sum_{j=1}^n b_j: \quad (3.13)$$

(3.12) և (3.13) պայմանների ձախ մասերի հավասարությունից կհետևի $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ (3.9) պայմանը: Թեորեմի անհրաժեշտության մասն ապացուցված է:

Բավարարություն. տրված է T խնդիրը, որի արտադրության և սպառման ծավալների համար իրավացի է $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ պայմանը:

Պահանջվում է ապացուցել լավագույն լուծման գոյությունը տրված T խնդրի համար:

Օգտվենք ԳԾԽ լավագույն լուծման գոյության թեորեմից: Նախ՝ հիմնավորենք T խնդրի համար գոյե մեկ թույլատրելի լուծման գոյությունը (որը սերտորեն կապված է $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ պայմանի հետ), այնուհետև նպատակային ֆունկցիայի սահմանափակ լինելն այդ թույլատրելի լուծման դեպքում:

Ըստ այդմ, որպես թույլատրելի լուծում առաջարկենք՝ $\bar{x}_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{d}$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, որտեղ $d = \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j > 0$: Դժվար չէ

ստուգել $\bar{X} = \|\bar{x}_{ij}\|_{m,n}$ մատրիցի թույլատրելի լուծում լինելը (3.5)–(3.8) խնդրի համար:

Իրոք.

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i \cdot b_j}{d} = \frac{a_i}{d} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i \cdot d}{d} = a_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i \cdot b_j}{d} = \frac{b_j}{d} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{b_j \cdot d}{d} = b_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\bar{x}_{ij} > 0, \text{ քանի որ } a_i > 0, b_j > 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}:$$

Այսպիսով՝ (3.5)-(3.8) խնդրի ԹԼԲ-ն դատարկ չէ:

Այժմ հիմնավորենք (3.5) նպատակային ֆունկցիայի սահմանափակ լինելը խնդրի ԹԼԲ-ի վրա: Նշանակենք՝ $c_{\max} = \max_{i,j} c_{ij}$,

$$c_{\min} = \min_{i,j} c_{ij}:$$

(3.5) նպատակային ֆունկցիայի մեջ c_{ij} գործակիցները հաջորդաբար փոխարինելով դրանց առավելագույն՝ $c_{\max}$, այնուհետ նվազագույն՝ $c_{\min}$ արժեքներով, նկատի ունենալով $x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ պայմանը, կունենանք.

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \leq c_{\max} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = c_{\max} \sum_{i=1}^m a_i = c_{\max} d,$$

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \geq c_{\min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = c_{\min} \sum_{i=1}^m a_i = c_{\min} d,$$

հետևաբար՝

$$c_{\min} d \leq F(X) \leq c_{\max} d: \quad (3.14)$$

Թեորեմի բավարարության մասն ապացուցված է:

Թեորեմն ապացուցված է:

Նկատենք, որ (3.14) պայմանից հետևում է T խնդրի նպատակային ֆունկցիայի ոչ միայն ներքևից սահմանափակ լինելը (ինչը պահանջվում էր թեորեմի բավարարությունն ապացուցելու համար), այլև վերևից, որը կիրառական նշանակություն ունի մաքսիմումի պահանջով մի շարք խնդիրների լուծման համար: Մյուս կող-

մից, $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ ֆունկցիայի մաքսիմումի որոնումը կարելի է փո-

խարհնել $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \hat{c}_{ij} x_{ij}$ ֆունկցիայի մինիմումի հաշվարկով, որտեղ՝

$$\hat{c}_{ij} = -c_{ij}:$$

Նշենք նաև, որ թեորեմի բավարարության մասի ապացույցը կարելի էր ներկայացնել առանց ԳԾԽ գոյության թեորեմի կիրառության, հաշվի առնելով, որ T խնդրի ԹԼԲ-ն փակ, սահմանափակ բազմություն է, որի վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիան (ինչպիսին (3.5) է) ստանում է իր նվազագույն, ինչպես նաև առավելագույն արժեքները:

Այժմ անդրադառնանք T խնդրի (3.6), (3.7) սահմանափակումների համակարգին: Նշանակենք T -ով՝ (3.6), (3.7) համակարգի x_{ij} ($i = 1, m, j = 1, n$) անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցը (3.15): T մատրիցի տողերի չափողականությունը որոշվում է (3.6), (3.7) համակարգի սահմանափակումների թվով՝ $(m+n)$, իսկ սյուների չափողականությունը՝ համակարգի անհայտների թվով՝ mn :

$$T_{m+n, mn} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_{11}x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{21}x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots & x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{in} & \dots & x_{m1}x_{m2} \dots x_{mn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right) \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$\leftarrow \hspace{10em} m \cdot n \hspace{10em} \rightarrow$

(3.15)

Դիտարկենք T մատրիցի կամայական P_{ij} սյունը, որի բաղադրիչները կազմված են x_{ij} անհայտի գործակիցներից.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} x_{ij} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ m \\ m+1 \\ m+j \\ m+n \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Նկատենք, որ P_{ij} վեկտորի i -րդ և $(m+j)$ -րդ բաղադրիչները հավասար են 1-ի, իսկ մնացածները՝ զրոյի: Պատճառն այն է, որ x_{ij} անհայտը մասնակցում է (3.6), (3.7) համակարգի ընդամենը երկու սահմանափակումներում՝ (3.6)-ի i -րդ՝ $x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{in} = a_i$ և (3.7)-ի j -րդ՝ $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{mj} = b_j$ հավասարումներում, որտեղ x_{ij} անհայտի գործակիցները հավասար են 1-ի:

Այսպիսով՝ T մատրիցի կամայական սյան տարրերից ճիշտ երկուսը հավասար են 1-ի: Զրոյից տարբեր տարրերից մեկը մատրիցի առաջին m տողերում է՝ բնութագրելով այն արտադրական կետի ինդեքսը, որտեղից իրականացվում է արտադրանքի մատակարարումը, իսկ մյուսը՝ վերջին n տողերում՝ արտացոլելով այն սպառման կետի ինդեքսը, որի ուղղությամբ է իրականացվում արտադրանքի մատակարարումը: Հետևաբար՝ T մատրիցի սյուները բնութագրում են արտադրական և սպառման կետերի միջև առկա կապերը կամ արտադրանքի տեղափոխման ուղղությունները:

Ներկայացնենք T մատրիցի կարևոր հատկություններից մի քանիսը:

Թեորեմ 1: T խնդրին համապատասխանող մատրիցի r_T ռանգը հավասար է՝ $m + n - 1$:

Ապացույց:

Ընդհանուր առմամբ, T մատրիցի ռանգի առավելագույն արժեքը $\max(r_T) \leq \min(m + n, m \cdot n)$ է:

Առանձնացնենք 3 դեպք.

- 1) $m+n > m \cdot n$: Հնարավոր է միայն, երբ m կամ n թվերից գոնե մեկը հավասար է 1-ի: Լուծումը տրիվիալ է, իսկ մոդելավորման և տնտեսագիտական բովանդակության տեսանկյունից, այս դեպքը հետաքրքրություն չի ներկայացնում:
- 2) $m+n = m \cdot n$: Հնարավոր է միայն, երբ $m=2$ և $n=2$, այն է՝ շուկայում առկա են երկուական արտադրող և սպառող:
- 3) $m+n < m \cdot n$: Հնարավոր է, երբ $m > 2$ և $n \geq 2$ կամ $m \geq 2$ և $n > 2$:

Կիրառական տեսանկյունից, ընդհանրացնելով հեռանկարային վերջին երկու դեպքերը, կունենանք, որ T մատրիցի ռանգի առավելագույն արժեքը չի կարող գերազանցել մատրիցի տողերի թիվը՝ $\max(r_T) \leq m+n$: Արդյո՞ք T մատրիցի բոլոր տողերը գծորեն անկախ են՝ $r_T = m+n$:

Ցույց տանք, որ T մատրիցի մեջ կան գծորեն կախյալ տողեր: Իրոք, եթե (3.15) մատրիցի առաջին m տողերը գումարենք և արդյունքը գրենք առաջին տողում, իսկ վերջին n տողերը գումարենք և արդյունքը գրենք $(m+n)$ -րդ տողում, կստանանք մի նոր մատրից, որի երկու տողերը (առաջին և վերջին) իրար հավասար են (կազմված են մեկերից): Հետևաբար՝ գոյություն չունի $(m+n)$ -րդ կարգի 0-ից տարբեր միևնուր, ուստի $r_T < m+n$:

Այժմ ցույց տանք, որ T մատրիցի համար գոյություն ունի $(m+n-1)$ կարգի 0-ից տարբեր միևնուր: Դիտարկենք (3.15) մատրիցի առաջին $(m+n-1)$ տողերով և $x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n-1}$ փոփոխականներին համապատասխանող սյուներով կազմված հետևյալ միևնուրը.

$$\Delta_{m+n-1} = \begin{vmatrix} & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{mn} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n-1} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad (3.17)$$

Հետևաբար՝ $r_T = m+n-1$: Թերթեն Լ-ն ապացուցված է:

Թեորեմ II: T մատրիցի կամայական մինորը հավասար է 0 կամ ± 1 :

Ապացույց:

Կիրառենք ինդուկցիայի մեթոդը:

T մատրիցի առաջին կարգի կամայական մինորի համար թեորեմի պնդումն ակնհայտ է, քանի որ (3.15) մատրիցը կազմված է 1 և 0 տարրերից: Ենթադրենք՝ թեորեմն իրավացի է T մատրիցի $(k-1)$ -րդ կարգի բոլոր մինորների համար: Ցույց տանք թեորեմի իրավացի լինելը կամայական Δ_k k -րդ կարգի մինորի համար:

Ընդհանրապես, Δ_k մինորի կամայական սյունը կարող է պարունակել կամ երկու հատ 1, կամ մեկ հատ 1, կամ կազմված լինել միայն 0-ներից:

- Եթե Δ_k մինորը պարունակում է 0-ական սյուն, ապա $\Delta_k = 0$, և թեորեմի պնդումն ակնհայտ է:
- Այժմ ենթադրենք, որ Δ_k մինորի յուրաքանչյուր սյունը պարունակում է առնվազն մեկ հատ 1: Այս դեպքում հնարավոր տարբերակներն են.

- 1) Δ_k մինորի գոնե մեկ սյունը պարունակում է ճիշտ մեկ հատ 1: Վերլուծելով մինորն ըստ այդ սյան՝ կստանանք.

$$\Delta_k = 1 \cdot (-1)^l \cdot \Delta_{k-1} = \pm \Delta_{k-1}: \quad (3.18)$$

Հաշվի առնելով Δ_{k-1} կարգի մինորի վերաբերյալ ինդուկցիայի ենթադրությունը՝ (3.18)-ից հետևում է, որ Δ_k հավասար է 0 կամ ± 1 :

- 2) Δ_k մինորի բոլոր սյուները պարունակում են ճիշտ երկու հատ 1: Դա հնարավոր է, երբ մինորի տողերն ընտրված են T մատրիցի ինչպես առաջին m , այնպես էլ վերջին n տողերից: Շարադրանքի պարզության համար T մատրիցի տողերը դասակարգենք ըստ երկու խմբի, որոնցից I -ն ընդգրկում է մատրիցի առաջին m , իսկ II -ը՝ վերջին n տողերը: Վերցնենք Δ_k մինորի կամայական տողը, որը պատկանում է I խմբին և դրան գումարենք Δ_k մինորում ընդգրկված՝ այդ խմբի մնացած տողերը: Արդյունքում ձևավորված տողը կազմված կլինի միայն 1-երից: Նույն կերպ, II խմբի ցանկացած տողին գումարելով այդ խմբի մնացած տողերը, որոնք ընդ-

գրկված են Δ_k մինորուն, կստանանք 1-երից կազմված ևս մեկ տող: Նշենք, որ կատարված գործողությունները չեն փոխում Δ_k -ի մեծությունը: Արդյունքում Δ_k -ն ունի երկու գծերն կախյալ տողեր, հետևաբար՝ հավասար է 0-ի: Թեորեմ II-ն ապացուցված է:

Թեորեմ I-ից հետևում է, որ T խնդրի կամայական X լավագույն լուծման mn բաղադրիչներից 0-ից տարբեր կարող են լինել առավելագույնը $m+n-1$ հատը, ընդ որում, չվերածվող խնդրի լավագույն լուծումն ունի ճիշտ՝ $m+n-1$ դրական փոխադրումներ (0-ից տարբեր բաղադրիչները $m+n-1$ հատ են):

Սահմանում: T խնդիրը կոչվում է **չվերածվող**, եթե չվերածվող են խնդրի ԹԼԲ բոլոր գազաթները (այն է՝ կամայական գազաթի 0-ից տարբեր բաղադրիչները $m+n-1$ հատ են): Հակառակ դեպքում T խնդիրը վերածվող է: Գազաթների վերածվող լինելը դժվարացնում է խնդրի լուծումը՝ առաջ բերելով «ցիկլայնության» երևույթ, որի դեպքում պարբերաբար կրկնվում են միևնույն թույլատրելի լուծումները, և լավագույն լուծումը հասանելի չէ:

Ստորև բերված թեորեմի օգնությամբ կարելի է պարզել T խնդրի վերածվող կամ չվերածվող լինելը:

Թեորեմ III: T խնդրի չվերածվող լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն չունենա արտադրական կետերի այնպիսի ոչ լրիվ խումբ, որի գումարային առաջարկը հավասար լինի սպառման կետերի կամայական ոչ լրիվ խմբի գումարային պահանջարկին:

Այլ կերպ ասած, T խնդիրը կլինի չվերածվող այն և միայն այն դեպքում, եթե արտադրական կետերի՝ $i_1, i_2, \dots, i_t$ և սպառման կետերի՝ $j_1, j_2, \dots, j_s$ ինդեքսների խմբերի համար, որտեղ՝ $t+s < m+n$, տեղի ունենա.

$$\sum_{k=1}^t a_{i_k} \neq \sum_{k=1}^s b_{j_k} : \quad (3.19)$$

Ապացույց:

Անհրաժեշտություն. ենթադրենք՝ T խնդիրը չվերածվող է, սակայն $i_1, i_2, \dots, i_t, j_1, j_2, \dots, j_s, t+s < m+n$ ՝ ինդեքսների որոշակի խմբերի համար իրավացի է.

$$\sum_{k=1}^t a_{i_k} = \sum_{k=1}^s b_{j_k} : \quad (3.20)$$

Արտադրական և սպառման կետերում առանձնացնենք 2 խումբ: Արտադրական կետերի առաջին խմբում ներառենք $i_1, i_2, \dots, i_t$ ինդեքսներով, երկրորդում՝ մնացած արտադրական կետերը: Սպառման կետերի առաջին խմբում ներառենք $j_1, j_2, \dots, j_s$ ինդեքսներով, երկրորդում՝ մնացած սպառման կետերը: (3.20) պայմանի համաձայն՝ առաջին արտադրական խմբի գումարային առաջարկը համընկնում է սպառման առաջին խմբի գումարային պահանջարկին: Քանի որ՝ $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, նույն պնդումն իրավացի է

նաև արտադրական և սպառման երկրորդ խմբերի համար:

Առաջին խմբի արտադրական և սպառման կետերի միջև ոչ ավելի, քան $t + s - 1$ հատ բեռնափոխադրումներով կարելի է ամբողջությամբ բավարարել խմբի սպառման կետերի պահանջարկն արտադրական կետերի ամբողջ արտադրանքի լրիվ իրացման հաշվին: Նույն պայմաններով, երկրորդ խմբի արտադրական և սպառման կետերի միջև կպահանջվեն ոչ ավելի, քան $(m-t) + (n-s) - 1$ հատ բեռնափոխադրումներ: Առաջին և երկրորդ խմբերի բեռնափոխադրումները համատեղ կծնավորեն T խնդրի թույլատրելի լուծումը: Այնուամենայնիվ, բեռնափոխադրումների ընդհանուր թիվը չի գերազանցում.

$$[t + s - 1] + [(m - t) + (n - s) - 1] = m + n - 2,$$

որը հակասում է դիտարկվող խնդրի չվերածվող լինելու սկզբնական ենթադրությանը: Եկանք հակասության: Թեորեմի անհրաժեշտության մասն ապացուցված է:

Նպատակահարմար ենք գտնում չշարադրել թեորեմի *բավարարության* ապացույցը, քանի որ այն ընթերցողից պահանջում է մաթեմատիկական այնպիսի գիտելիքներ, որոնք դուրս են սույն գրքի շրջանակներից:

Թեորեմ III-ն ապացուցված է:

T խնդրի կարևոր հատկություններից է ԹԼԲ գազաթների կոորդինատների **ամբողջաթվությունը**:

Թեորեմ IV: Եթե T խնդրի $a_1, a_2, \dots, a_m$ և $b_1, b_2, \dots, b_n$, համապատասխանաբար՝ արտադրության և սպառման ծավալներն ամբողջ թվեր են, ապա ԹԼԲ գազաթների կոորդինատները նույնպես կլինեն ամբողջ թվեր:

Ապացույց:

Դիտարկենք T խնդրի ԹԼԲ կամայական $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$ գազաթը:

Թեորեմ I-ի համաձայն՝ T խնդրին համապատասխանող մատրիցի ռանգը $r_T = m + n - 1$ է: Հետևաբար՝ X գազաթի $m \cdot n$ կոորդինատներից 0-ից տարբեր կարող են լինել առավելագույնը $(m + n - 1)$ հատը: Մինչդեռ $m \cdot n - (m + n - 1)$ կոորդինատները հաստատապես 0 են, հետևաբար՝ ամբողջաթիվ են:

X գազաթի մնացած $(m + n - 1)$ կոորդինատների ամբողջաթիվ լինելը պարզելու համար (3.6) (3.7) համակարգի գծորեն անկախ տողերի և ուսումնասիրվող $(m + n - 1)$ փոփոխականների նկատմամբ կիրառենք Կրամերի կանոնը.

$$x_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}, \quad (3.21)$$

որտեղ Δ -ն T մատրիցի $(m + n - 1)$ -րդ կարգի մինորն է, իսկ Δ_{ij} ՝ $(m + n - 1)$ -րդ կարգի մինոր, որը ստացվում է Δ մինորում x_{ij} փոփոխականին համապատասխանող սյան տարրերը փոխարինելով արտադրության և սպառման համապատասխան ծավալներով, այլ կերպ ասած, (3.6), (3.7) համակարգերի ազատ անդամների սյունով:

Թեորեմ II-ի համաձայն՝ Δ -ն, որպես T մատրիցի կամայական մինոր, կարող է հավասար լինել 0 կամ ± 1 : Մյուս կողմից, քանի որ T մատրիցի ռանգը $m + n - 1$ է, ուստի $\Delta \neq 0$, հետևաբար՝ $\Delta = \pm 1$:

Δ_{ij} -ն, կառուցման առանձնահատկություններից ելնելով, կազմված է 0 կամ 1 տարրերից, ինչպես նաև $a_1, a_2, \dots, a_m$ -ից և $b_1, b_2, \dots, b_n$ -ից, որոնք, ըստ տրվածի, նույնպես ամբողջ թվեր են: Հետևաբար՝ Δ_{ij} մինորն ամբողջ թիվ է: Արդյունքում (3.21) բանաձևով հաշվարկվող X գազաթի մնացած $(m + n - 1)$ կոորդինատներն ամբողջաթիվ են: Թեորեմ IV-ն ապացուցված է:

3.2. T խնդրի երկակին: T խնդրի ԼՈՒԾՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆ

Կազմենք T խնդրի երկակին: Այդ նպատակով i -րդ արտադրական կետի սահմանափակմանը համապատասխանեցնենք երկակի խնդրի $-u_i$ անհայտը ($i = \overline{1, m}$), j -րդ սպառման կետի սահմանափակմանը՝ v_j անհայտը ($j = \overline{1, n}$): u_i անհայտից առաջ «-» նշանը դրվում է երկակի խնդրի տնտեսագիտական մեկնաբանության հարմարության համար:

Երկակի խնդիրների կառուցման կանոններից ելնելով՝ (3.5)-(3.8) պայմաններով տրված T խնդրի երկակին կայանում է.

$$\Phi(-u, v) = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i \quad (3.22)$$

ֆունկցիայի առավելագույն արժեքի որոշման մեջ՝

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.23)$$

սահմանափակումների բավարարման պայմաններում: (3.22), (3.23) պայմաններով տրվածն անվանենք $\tilde{T}$:

Նշենք, որ $m+n$ անհայտով $m \cdot n$ անհավասարություններից կազմված (3.23) համակարգի մատրիցը (3.15) T մատրիցի **տրանսպոնացվածն** է: Հետևաբար՝ (3.23) համակարգի ռանգը նույնպես հավասար է $m+n-1$:

Օգտվելով ԳԾԽ երկակիության տեսության II թեորեմից՝ ձևակերպենք **T խնդրի լուծման օպտիմալության հայտանիշը**:

Թեորեմ V: Որպեսզի T խնդրի կամայական $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$ թույլատրելի

լուծումը հանդիսանա լավագույն լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա այնպիսի՝

$W = (-u_1, -u_2, \dots, -u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$ վեկտոր, որ.

$$v_j - u_i = c_{ij}, \quad \text{երբ } x_{ij} > 0, \quad (3.24)$$

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad \text{երբ } x_{ij} = 0: \quad (3.25)$$

u_i և v_j թվերն անվանենք համապատասխանաբար՝ արտադրական և սպառման կետերի պոտենցիալներ, W -ն՝ պոտենցիալներ-

րի վեկտոր, որը ներկայացնում է $\tilde{T}$ երկակի խնդրի կամայական լավագույն լուծումը:

Ցույց տանք, որ եթե $W = (-u_1, -u_2, \dots, -u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$ վեկտորը երկակի խնդրի լավագույն լուծումն է, ապա $\tilde{W} = (-u_1 + h), -(u_2 + h), \dots, -(u_m + h), v_1 + h, v_2 + h, \dots, v_n + h)$ վեկտորը նույնպես կլինի այդպիսին:

Իրոք, եթե W -ն բավարարում է երկակի խնդրի սահմանափակումների համակարգը, ապա (3.23) համակարգին կբավարարի նաև $\tilde{W}$ վեկտորը՝ որպես թույլատրելի լուծում: Մյուս կողմից.

$$\Phi(\tilde{W}) = \sum_{j=1}^n b_j(v_j + h) - \sum_{i=1}^m a_i(u_i + h) = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i + h \left(\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i \right): \quad (3.26)$$

Հաշվի առնելով, որ $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, (3.26)-ից կստանանք.

$$\Phi(\tilde{W}) = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i = \Phi(W), \quad (3.27)$$

իետևաբար՝ $\tilde{W}$ վեկտորը $\tilde{T}$ երկակի խնդրի լավագույն լուծումն է:

Այսպիսով՝ արտադրական և սպառման կետերի պոտենցիալները տարբերվում են հաստատուն գումարելիներով, ուստի դրանք կարող են որոշվել միայն կամայական հաստատուն անդամի ճշգրտությամբ:

Ինչպես համոզվել ենք, տրանսպորտային T խնդիրը միշտ ունի լավագույն լուծում (տես T խնդրի լավագույն լուծման գոյության թեորեմը): Օգտվելով երկակիության տեսության I թեորեմից՝ ձևակերպենք հաջորդ թեորեմը:

Թեորեմ VI: $\tilde{T}$ երկակի խնդիրը միշտ ունի լավագույն լուծում, ընդ որում, եթե $X = \|x_{ij}\|_{m,n}$ և $W = (-u_1, -u_2, \dots, -u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$,

համապատասխանաբար՝ T և $\tilde{T}$ խնդիրների լավագույն լուծումներն են, ապա.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i: \quad (3.28)$$

Թեորեմ V-ն ու VI-ն առանձին ապացուցման կարիք չունեն, քանի որ երկակիության տեսության ընդհանուր թեորեմների մասնավոր դեպքեր են, որոնց ապացույցները հանգամանորեն ներկայացվել են սույն գրքի համապատասխան գլխում:

3.3. ՏՐԱՆՍՊՈՐՏԱՅԻՆ ԵՐԿԱԿԻ ԽՆԴՐԻ ՏՆՏԵՍԱԳԻՏԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Նախ՝ համառոտ կերպով վերհիշենք սկզբնական (ուղիղ) խնդրի տնտեսագիտական դրվածքը:

Դիցուք՝ որևէ կազմակերպություն, օրինակ՝ A կահույքի սրահն ունի իրեն պատկանող m պահեստներ, որոնցից կահույքի հավաքածուները կարող են տեղափոխվել նույն կազմակերպությանը պատկանող n խանութները:

Նշանակենք i -ով պահեստների, իսկ j -ով՝ խանութների ինդեքսները, որտեղ՝ $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$:

Ենթադրենք՝ հայտնի է յուրաքանչյուր պահեստի առաջարկը՝ a_i ($i = \overline{1, m}$), ինչպես նաև յուրաքանչյուր խանութի պահանջարկը՝ b_j ($j = \overline{1, n}$), որտեղ $a_i > 0$, $b_j > 0$: Հայտնի են նաև i -րդ պահեստից j -րդ խանութ կահույքի 1 հավաքածուի տեղափոխման տրանսպորտային ծախսերը՝ c_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$), $c_{ij} > 0$:

Պահանջվում է կազմել բեռների տեղափոխման այնպիսի տարբերակ, որի համաձայն՝ նվազագույն գումարային տրանսպորտային ծախսերով կապահովվի խանութների պահանջարկի բավարարումը՝ պահեստներում առկա բեռների տեղափոխման (իրացման) հաշվին:

Նշանակենք x_{ij} -ով i -րդ պահեստից j -րդ խանութ տեղափոխվող բեռների, այն է՝ կահույքի հավաքածուների քանակը ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$), իսկ F -ով՝ բոլոր m պահեստներից դեպի բոլոր n խանութներ բեռների տեղափոխման գումարային տրանսպորտային ծախսերը: Արդյունքում կստանանք մեզ արդեն քաջածանոթ՝ (3.1)-(3.4) տնտեսամաթեմատիկական մոդելը:

Այժմ ձևակերպենք երկակի խնդիրը:

Ենթադրենք՝ B տրանսպորտային կազմակերպությունը, որին հայտնի են A կահույքի սրահի տվյալները, իր ծառայություններն է

առաջարկում բեռների տեղափոխման հարցում: Ըստ պայմանավորվածության՝ B տրանսպորտային կազմակերպությունը A կահույքի սրահից՝ վերջինիս համար ոչ առարկելի գներով ձեռք կբերի (կգնի) պահեստներում եղած կահույքի հավաքածուները՝ A կահույքի սրահի խանութներում դրանք վերավաճառելու պայմանով այնպես, որ գնման և վերավաճառքի գների տարբերությունից ստացված ընդհանուր գումարը համարվի տրանսպորտային ծառայության վարձը:

Ինչպիսի՞ ոչ առարկելի, այսինքն՝ նաև A կահույքի սրահի համար ընդունելի գներ պետք է սահմանի B տրանսպորտային կազմակերպությունը՝ պահեստներից և խանութներից յուրաքանչյուրում առկա կահույքի մեկ հավաքածուի դիմաց, որպեսզի գնման և վերավաճառքի գների տարբերությունից ձևավորվող ընդհանուր տրանսպորտային վարձը լինի առավելագույնը:

Նշանակենք u_i -ով i -րդ պահեստից կահույքի 1 հավաքածուի գնման գինը ($i = \overline{1, m}$), v_j -ով՝ j -րդ խանութում 1 հավաքածուի վերավաճառքի գինը ($j = \overline{1, n}$), իսկ Φ -ով՝ բոլոր m պահեստներից դեպի բոլոր n խանութներ բեռների տեղափոխման դիմաց B տրանսպորտային կազմակերպության վարձը:

Ստորև բերված (3.29)-(3.32) ԳԾԽ-ն **երկակի խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելն է**: Նպատակահարմար ենք համարել ձախ կողմում ներկայացնել նաև ուղիղ տրանսպորտային խնդրի (3.1)-(3.4) մոդելը.

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.1) \quad \Phi(u, v) = \sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i \rightarrow \max, \quad (3.29)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.2) \quad v_j - u_i \leq c_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.30)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.3) \quad u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.31)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.4) \quad v_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}: \quad (3.32)$$

Այսպիսով, ի կրումն $\tilde{T}$ խնդրի (3.22), (3.23) պայմանների, (3.29)-(3.32) մոդելն ընդգրկում է նաև գների ոչ բացասական լինելու՝ (3.31) և (3.32) պայմանները:

Երկակի խնդրի (3.30) պայմանն ապահովում է u_i և v_j գների ոչ առարկելի լինելը: Իրոք, եթե i -րդ պահեստից կահույքի 1 հավաքածուի ձեռքբերման վրա B կազմակերպությունը ծախսում է u_i գումար, այնուհետև նույն հավաքածուն, տեղափոխելով j -րդ խանութ, վաճառում է v_j գումարով, ապա $(v_j - u_i)$ մեծությունը ցույց է տալիս i -րդ պահեստից մինչև j -րդ խանութ կահույքի 1 հավաքածուի տեղափոխումից B կազմակերպության աշխատած զուտ գումարը կամ տրանսպորտային ծառայության վարձը: Մյուս կողմից, ուղիղ խնդրի բովանդակությունից հայտնի է, որ A կազմակերպությունը, սեփական ուժերով բեռների տեղափոխումը կազմակերպելու դեպքում, i -րդ պահեստից դեպի j -րդ խանութ կահույքի 1 հավաքածուն տեղափոխելիս կծախսի C_{ij} գումար: Հետևաբար՝ C_{ij} -ն այն առավելագույն գումարն է, որը A կազմակերպությունը պատրաստ է վճարել B -ին՝ i -րդ պահեստից դեպի j -րդ խանութ միավոր բեռի փոխադրման համար՝ $(v_j - u_i) \leq C_{ij}$: Հակառակ դեպքում, եթե B -ին չհաջողվի առաջարկել A կազմակերպության տեսանկյունից ոչ առարկելի u_i և v_j գներ, և $(v_j - u_i) > C_{ij}$, ապա A -ն կիրաժարվի B կազմակերպության ծառայություններից, և գործարքը չի կայանա:

Մյուս կողմից, երկակիության II թեորեմի համաձայն, $x_{ij} > 0$ դրական բեռնափոխադրումներ տեղի կունենան այն i պահեստների և j խանութների միջև, որոնց համար իրավացի է $(v_j - u_i) = C_{ij}$ պայմանը, այսինքն՝ երբ B տրանսպորտային կազմակերպության միավոր բեռի տեղափոխումից աշխատած գումարը հավասար է պատվիրատուի տեսանկյունից առավելագույն ոչ առարկելի մեծությանը՝ C_{ij} -ին:

Երկակիության I թեորեմի համաձայն՝ եթե սկզբնական խնդրում բեռների լավագույն բաշխումն իրագործելի է, ապա երաշխավորված է գնման և վերավաճառքի ոչ առարկելի գների գոյությունը, ընդ որում, բոլոր m պահեստների և n խանութների միջև բեռնափոխադրումների իրականացման համար B տրանսպորտային կազմակերպության վարձատրության առավելագույն մեծություն

նը հավասար է A կահույքի սրահի կողմից բեռների տեղափոխման ծախսերի նվազագույն մակարդակին:

Միաժամանակ, արժե նշել, որ ըստ (3.27) առնչության, եթե արտադրական և սպառման կետերի պոտենցիալները կամ, այլ կերպ ասած, պահեստներից գնման և խանութներում վերավաճառքի գները փոփոխվեն հաստատունով, ապա փոխադրող կազմակերպության վարձատրությունը կմնա անփոփոխ, ինչը որոշակի անորոշություններ է պարունակում օպտիմալ գների սահմանման հարցում:

3.4. ՏՐԱՆՍՊՈՐՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄՈԴԵԼՆ ԱՎԵԼՑՈՒԿԱՅԻՆ ՊԱՇԱՐՆԵՐԻ ԵՎ ՉԲԱՎԱՐԱՐՎՈՂ ՊԱՅԱՆՋԱՐԿԻ ԴԵՊԵՈՒՄ

3.4.1. Փակ և բաց տրանսպորտային խնդիրներ

Եթե տրանսպորտային խնդրում գումարային առաջարկը՝

$$A = \sum_{i=1}^m a_i,$$
 հավասար է գումարային պահանջարկին՝ $B = \sum_{j=1}^n b_j$,

այն է՝ $A = B$, ապա խնդիրը կոչվում է **փակ**, և այդ դասի խնդիրները միշտ լուծում ունեն: (3.5)-(3.8) պայմաններով T խնդիրը փակ տրանսպորտային խնդրի մոդելի օրինակ է:

Տրանսպորտային խնդիրը կոչվում է **բաց**, եթե գումարային առաջարկը հավասար չէ գումարային պահանջարկին՝ $A \neq B$: Այս դասի խնդիրները լուծելու համար խնդրի մոդելը նախապես պետք է բերել փակ տեսքի:

3.4.2. Բաց տրանսպորտային խնդրի մոդելն ավելցուկային պաշարների դեպքում

Որոշ դեպքերում չի պահանջվում յուրաքանչյուր արտադրական կետում առկա առաջարկի ամբողջական տեղափոխում: Նշա-

նակում է՝ $A \neq B$, ընդ որում, $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$:

Ավելցուկային պաշարների դեպքում բաց տրանսպորտային խնդրի մոդելը հետևյալն է.

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.33)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.34)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.35)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}: \quad (3.36)$$

(3.33)-(3.36) պայմաններով բաց մոդելը կարելի է դարձնել փակ՝ ներմուծելով կեղծ սպառման կետ՝ B_{n+1} , որի կեղծ պահանջարկի չափն է.

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (3.37)$$

Ըստ էության, b_{n+1} մեծությունը ցույց է տալիս չիրացված (չտեղափոխված) արտադրանքի ընդհանուր ծավալը: Այդ դեպքում $x_{i, n+1}$ մեծությունը ցույց է տալիս i -րդ արտադրական կետի չիրացված արտադրանքի քանակությունը (չիրացված կամ ավելցուկային առաջարկը):

(3.33)-(3.36) խնդրին համապատասխանող փակ մոդելը հետևյալն է.

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.38)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.39)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (3.40)$$

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j, \quad (3.41)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n+1}: \quad (3.42)$$

Նկատենք, որ մոդելում $c_{i,n+1}$ ($i = \overline{1, m}$) մեծությունների որոշմամբ հնարավոր է, ըստ առանձին արտադրական կետերի, կառավարել $x_{i,n+1}$ ($i = \overline{1, m}$) չիրացված առաջարկի մեծությունները (այլ կերպ ասած, ավելցուկային պաշարները): Հետևաբար՝ $c_{i,n+1}$ ($i = \overline{1, m}$) մեծությունները բնութագրում են տուգանքի այն չափը, որը սահմանվում է i -րդ արտադրական կետի համար՝ չիրացված միավոր արտադրանքի դիմաց: Մասնավոր դեպքում, երբ բոլոր արտադրական կետերի տուգանային ծախսերը հավասար են (նշանակում է՝ որևէ արտադրական կետից արտադրանքի տեղափոխմանը նախապատվություն չի տրվում), ապա նպատակահարմար է ընդունել, որ $c_{i,n+1} = 0$ ($i = \overline{1, m}$):

3.4.3. Բաց տրանսպորտային խնդրի մոդելը չբավարարվող պահանջարկի դեպքում

Չբավարարվող պահանջարկի դեպքում՝ $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, և բաց տրանսպորտային խնդրի մոդելն է.

$$F(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.43)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.44)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.45)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}: \quad (3.46)$$

(3.43)–(3.46) պայմաններով բաց տրանսպորտային խնդիրը T տեսքի խնդրի բերելու համար ներմուծենք կեղծ արտադրական կետ (կեղծ պահեստ)՝ A_{m+1} , որտեղ կեղծ առաջարկի չափն է.

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i: \quad (3.47)$$

Այդ դեպքում a_{m+1} մեծությունը ցույց է տալիս չբավարարված պահանջարկի ընդհանուր ծավալը, իսկ $x_{m+1, j}$ -ն՝ չբավարարված պահանջարկի մեծությունն ըստ առանձին սպառման կետերի, տվյալ դեպքում՝ ըստ j -րդ սպառման կետի:

(3.43)–(3.46) խնդրին համապատասխանող փակ մոդելը հետևյալն է.

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.48)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m+1}, \quad (3.49)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.50)$$

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i, \quad (3.51)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m+1}, \quad j = \overline{1, n}: \quad (3.52)$$

Հարկ է արտադրանքի տեղափոխումը կազմակերպել այնպես, որ առավել կարևոր սպառման կետերի պահանջարկը բավարարվի հնարավորինս լրիվ չափով: Վերջինս կարգավորվում է մոդելում $c_{m+1, j}$ ($j = \overline{1, n}$) մեծությունների միջոցով, որոնք բնութագրում են վնասի այն չափը, որը հնարավոր է j -րդ սպառման կետի պահանջարկը մեկ միավորով չբավարարելու դեպքում:

Մասնավոր դեպքում, երբ սպառման կետերից ոչ մեկի պահանջարկի բավարարմանը նախապատվություն չի տրվում, նպատակահարմար է ընդունել, որ $c_{m+1, j} = 0$ ($j = \overline{1, n}$):

3.5. ՏՐԱՆՍՊՈՐՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ինչպես բոլոր ԳԾԽ-ների, այնպես էլ տրանսպորտային խնդրի լուծման խտրացիոն գործընթացը սկսվում է որևէ թույլատրելի լուծման որոշմամբ: Այնուհետև ստացված թույլատրելի լուծման նկատմամբ կիրառվում է օպտիմալության հայտանիշը (թեորեմ V):

Օպտիմալության հայտանիշի խախտման դեպքում որոշվում է նոր, նախորդից ավելի նախընտրելի թույլատրելի լուծումը:

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը. 3 արտադրական և 3 սպառման կետերի համար հայտնի են.

- արտադրական կետերի առաջարկը ներկայացնող վեկտորը՝ $a = (50, 60, 100)'$,
- սպառման կետերի պահանջարկի վեկտորը՝ $b = (70, 55, 85)'$,
- միավոր արտադրանքի տեղափոխմանն անհրաժեշտ տրանսպորտային ծախսերը ներկայացնող մատրիցը.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}:$$

Հաշվի առնելով, որ գումարային առաջարկը՝ $A = \sum_{i=1}^3 a_i = 210$,

և գումարային պահանջարկը՝ $B = \sum_{j=1}^3 b_j = 210$, իրար հավասար

են՝ $A = B$, կարող ենք ասել, որ սա փակ տրանսպորտային խնդրի օրինակ է:

Թույլատրելի լուծման որոշումը **հյուսիսարևմտյան անկյան եղանակով**.

				a_i
	1	2	2	50
	1	4	3	60
	2	3	5	100
b_j	70	55	85	

Քայլ I: Որոշում ենք՝ $x_{11} = \min\{50, 70\} = 50$:

			a_i	
	1	2	2	
	50			50 0
	1	4	3	
				60
	2	3	5	
				100
b_j	70	55	85	
	20			

Այս դեպքում առաջին տողի (պահեստի, արտադրական կետի) առաջարկը սպառված է: Հետևաբար՝ անցում է կատարվում հաջորդ տողին:

Քայլ II: Առաջին սպառման կետում դեռ առկա է 20 միավոր պահանջարկ: Որոշում ենք՝ $x_{21} = \min\{60, 20\} = 20$:

			a_i	
	1	2	2	
	50			50 0
	1	4	3	
	20			60 40
	2	3	5	
				100
b_j	70	55	85	
	20			
	0			

Քանի որ երկրորդ պահեստի առաջարկը դեռ սպառված չէ, առկա է 40 միավոր, հետևաբար՝ հաշվենք. $x_{22} = \min\{40, 55\} = 40$:

	a_i		
	1	2	2
	50		
	1	4	3
	20	40	
	2	3	5
			100
b_j	70	55	85
	20	15	
	0		

Երկրորդ պահեստի առաջարկը 0 է, հետևաբար՝ անցում է կատարվում հաջորդ տողին:

Քայլ III: Որոշում ենք՝ $x_{32} = \min\{100, 15\} = 15$, այնուհետև՝ $x_{33} = 85$:

	a_i		
	1	2	2
	50		
	1	4	3
	20	40	
	2	3	5
		15	85
b_j	70	55	85
	20	15	0
	0	0	

Այսպիսով՝ **հյուսիսարևմտյան անկյան** եղանակի կիրառմամբ ստացվեց հետևյալ թույլատրելի լուծումը կամ նախնական բաշխումը.

$$X^0 = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 20 & 40 & 0 \\ 0 & 15 & 85 \end{pmatrix}: \quad (3.53)$$

Նկատենք, որ X^0 նախնական բաշխման դրական բաղադրիչների թիվը հավասար է դիտարկվող խնդրի մատրիցի ռանգին՝

$r_T = m + n - 1 = 5$, ուստի T խնդիրը չվերածվող է: X^0 նախնական բաշխման օպտիմալությունը ստուգելու համար հաշվարկենք պոտենցիալները և ստուգենք (3.24), (3.25) օպտիմալության հայտահիշի տեղի ունենալը.

$$v_j - u_i = c_{ij}, \text{ եթե } x_{ij} > 0, \quad (3.24)$$

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \text{ եթե } x_{ij} = 0: \quad (3.25)$$

(3.24) բանաձևով u_i և v_j պոտենցիալների հաշվարկը կատարենք հետևյալ կերպ. u_i կամ v_j պոտենցիալներից որևէ մեկին վերագրենք կամայական հաստատուն թիվ: Թո՛ղ դա լինի u_2 պոտենցիալը, որին վերագրենք 0 արժեքը: u_2 -ի տողում $x_{21} > 0$ և $x_{22} > 0$, հետևաբար՝ v_1 և v_2 պոտենցիալների արժեքներն են. $v_1 = c_{21} + u_2 = 1 + 0 = 1$, $v_2 = c_{22} + u_2 = 4 + 0 = 4$: Այժմ արդեն v_1 պոտենցիալի միջոցով, հաշվի առնելով $x_{11} > 0$ պայմանը, կստանանք u_1 պոտենցիալի արժեքը՝ $u_1 = v_1 - c_{11} = 1 - 1 = 0$, իսկ v_2 պոտենցիալի միջոցով, ըստ $x_{32} > 0$ պայմանի, u_3 -ի արժեքը՝ $u_3 = v_2 - c_{32} = 4 - 3 = 1$: u_3 -ի միջոցով (ըստ $x_{33} > 0$ պայմանի) հաշվարկենք $v_3 = c_{33} + u_3 = 5 + 1 = 6$:

Ունենալով պոտենցիալների $u = (0, 0, 1)$ և $v = (1, 4, 6)$ վեկտորները՝ ստուգենք օպտիմալության (3.25) պայմանի տեղի ունենալը X^0 նախնական բաշխման մնացած՝ $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{23} = 0$ և $x_{31} = 0$ ազատ վանդակների համար.

	$v_1 = 1$	$v_2 = 4$	$v_3 = 6$
$u_1 = 0$	1 50	2	2
$u_2 = 0$	1 20	4 40	3
$u_3 = -1$	2	3 15	5 85

Օպտիմալության II` (3.25) պայմանը խախտվեց ազատ վանդակներից երեքում` (1, 2), (1, 3) և (2, 3), ընդ որում, բացարձակ արժեքով ամենամեծ շեղումը (1, 3) վանդակում է. $v_3 - u_1 \leq c_{13}$, և դա 4 միավոր է: Այսպիսով` նախնական բաշխումը օպտիմալ չէր, և նոր, թույլատրելի լուծում ստանալու համար պետք է կառուցել արտադրանքի տեղափոխման վերաբաշխման **փակ շղթա**` (1, 3)→(1, 1)→(2, 1)→(2, 2)→(3, 2)→(3, 3)→(1, 3) վանդակներով: Շղթա կազմող վանդակներին նշանափոխ վերագրվում են «+» և «-» նշանները` սկսած օպտիմալության հայտանիշի խախտում արձանագրած վանդակից: Մեր օրինակում դա (1, 3) վանդակն է, որին վերագրվել է «+» նշանը:

	$v_1 = 1$	$v_2 = 4$	$v_3 = 6$
$u_1 = 0$	1 - 50	2	2 +
$u_2 = 0$	1 + 20	4 -	3
$u_3 = -1$	2	3 +	5 -
		15	85

Հասկանալի է, որ վերաբաշխվող արտադրանքի քանակը պետք է հավասար լինի շղթայի «-» նշան ունեցող վանդակներում գտնվող x_{ij} մեծություններից նվազագույնին` $\Theta = \min\{50; 40; 85\} = 40$: Արդյունքում, շղթայի «+» նշանն ունեցող վանդակների x_{ij} -երին ավելացնելով Θ , իսկ «-» նշան ունեցող վանդակների x_{ij} -երից հանելով Θ , ստացվում է հետևյալ աղյուսակը.

	$v_1 = 1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$
$u_1 = 0$	1 - 10	2	2 +
$u_2 = 0$	1 60	4	3
$u_3 = 3$	2 +	3	5 -
		55	45

Հաշվելով նոր աղյուսակին համապատասխանող պոտենցիալները, ստուգելով օպտիմալության հայտանիշը, որը խախտվում է (3, 1) վանդակում, կրկնելով նախորդ գործողությունները՝ $\Theta = \min\{10; 45\} = 10$ արժեքի համար կունենանք հետևյալ աղյուսակը.

	$v_1 = -1$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$
$u_1 = 0$	1	2	2
$u_2 = 2$	1	4	3
$u_3 = 3$	2	3	5
	10	55	35

Օպտիմալության հայտանիշը դարձյալ խախտվել է, այժմ արդեն՝ (2, 3) վանդակում: Կատարելով նույն գործողությունները $\Theta = \min\{35; 60\} = 35$ համար՝ կունենանք հաջորդ աղյուսակը.

	$v_1 = 0$	$v_2 = 1$	$v_3 = 2$
$u_1 = 0$	1	2	2
$u_2 = 1$	1	4	3
$u_3 = 2$	2	3	5
	45	55	0

Բոլոր վանդակներում օպտիմալության հայտանիշի տեղի ունենալը նշանակում է, որ ստացված թույլատրելի լուծումը **լավագույնն** է.

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 \\ 25 & 0 & 35 \\ 45 & 55 & 0 \end{pmatrix}, \text{ իսկ}$$

$$F_{\min} = 2 \cdot 50 + 1 \cdot 25 + 3 \cdot 35 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 55 = 485 :$$

Թույլատրելի լուծման որոշումը **նվազագույն տարրի եղանակով**.

Քայլ 1: Տեղափոխման ծախսերի C մատրիցուն ընտրում ենք նվազագույն տարրը, դիցուք՝ c_{ks} -ն է: Որոշում ենք՝ $x_{ks} = \min \{a_k, b_s\}$:

Հնարավոր է երկու դեպք.

1. $a_k \leq b_s$,
2. $a_k > b_s$:

Առաջին դեպքում՝ $x_{ks} = a_k$, ուստի k -րդ տողի առաջարկը սպառված է: Պետք է անցում կատարել այլ տողի:

Մեր օրինակում նվազագույն տարրեր են՝ $c_{11} = c_{21} = 1$: Ընտրենք դրանցից որևէ մեկը: Ստովի համեմատելով առաջին և երկրորդ տողերի տարրերը՝ նկատում ենք, որ երկրորդ տողում, նվազագույնից բացի, բոլոր մյուսները գերազանցում են առաջին տողի համապատասխան տարրերը, ուստի նախապատվությունը տանք $c_{21} = 1$ -ին:

	a_i		
	1	2	2
	50		
	1	4	3
	60		
	2	3	5
	100		
b_j	70	55	85

Որոշում ենք՝ $x_{21} = \min \{60, 70\} = 60$: Երկրորդ պահեստի առաջարկը սպառված է, մինչդեռ առաջին սպառման կետում դեռ առկա է 10 միավորի պահանջարկ:

			a_i	
	1	2	2	50
	1	4	3	60
	60			0
	2	3	5	100
b_j	70	55	85	
	10			

Քայլ II: Անցում կատարենք հաջորդ նվազագույն տարրին, որն է՝ $c_{11} = 1$: Որոշում ենք՝ $x_{11} = \min\{50, 10\} = 10$: Արդյունքում առաջին սպառման կետի պահանջարկը բավարարված է, մինչդեռ առաջին պահեստում դեռ առկա է 40 միավորի առաջարկ:

			a_i	
	1	2	2	50
	10			40
	1	4	3	60
	60			0
	2	3	5	100
b_j	70	55	85	
	40			
	0			

Քայլ III: Նվազագույն տարրի հաջորդ թեկնածուներն են՝ $c_{12} = c_{13} = 2$: Նկատենք, որ $c_{31} = 2$ տարբերակը չի քննարկվում, քանի որ այդ դեպքին համապատասխանող սպառման կետի պահանջարկն արդեն իսկ բավարարված է: Դարձյալ մտովի համեմատելով բոլոր պահեստներից դեպի երկրորդ և երրորդ սպառման կետեր տեղափոխման տրանսպորտային ծախսերը՝ նախապատվու-

թյունը տալիս ենք $c_{13} = 2$ դեպքին: Որոշելով՝ $x_{13} = \min\{40, 85\} = 40$, կստանանք հետևյալ աղյուսակը.

	a_i		
	1	2	2
	10		40
	50	40	0
	1	4	3
	60		
	60	0	
	2	3	5
	100		
	70	55	85
b_j	40		45
	0		

Քայլ IV: Հաջորդ նվազագույն տարրն է՝ $c_{32} = 3$: Այս տարրերակը չի քննարկվում, քանի որ դրան համապատասխանող պահեստի առաջարկը (պաշարը) սպառված է: Որոշում ենք՝ $x_{32} = \min\{100, 55\} = 55$, որից հետո մնացորդային սկզբունքով լրացվում է վերջին՝ $x_{33} = 45$ տարրը: Արդյունքներն ամփոփված են ստորև ներկայացված աղյուսակում.

	a_i		
	1	2	2
	10		40
	50	40	0
	1	4	3
	60		
	60	0	
	2	3	5
	100	55	45
	70	55	85
b_j	40	0	45
	0		0

Այսպիսով՝ **նվազագույն տարրի** եղանակի կիրառման արդյունքում ստացվում է հետևյալ նախնական բաշխումը.

$$X^0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 40 \\ 60 & 40 & 0 \\ 0 & 55 & 45 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

որի օպտիմալությունը ստուգելու համար հաշվարկվում են u_i և v_j պոտենցիալները և ստուգվում օպտիմալության հայտանիշի պայմանները, ինչպես նկարագրված է նախորդ օրինակում:

Խորհուրդ է տրվում տրանսպորտային խնդրի սկզբնական թույլատրելի լուծումը գտնել նվազագույն տարրի եղանակով, քանի որ ըստ այդմ, որպես կանոն, ստացվում է ավելի նախընտրելի սկզբնական լուծում՝ տեսակարար տրանսպորտային ծախսերը հաշվի առնելու շնորհիվ:

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

4.1. ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ (ՈԳԾ) ԿԱՍ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐ: ՈԳԾ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԴԱՍԵՐԸ, ԼՈՒԾՄԱՆ ԱՌԱՆՁՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ֆունկցիայի մաքսիմումի կամ մինիմումի կետերի փնտրմանը վերաբերող յուրաքանչյուր խնդիր համարվում է **օպտիմալացման**: Օպտիմալացման խնդիրների որոշակի մասը, որպես կանոն, չի լուծվում դասական մեթոդներով: Դրանք, այսպես կոչված, մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրներն են: Ի տարբերություն դասականի, որոնք բնորոշ են երկրաչափությանը և ֆիզիկային, մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրներն առավելապես վերաբերում են մաթեմատիկական տնտեսագիտության հարցերին: Դրանք հիմնականում առաջանում են այն դեպքերում, երբ տրված դեֆիցիտային ռեսուրսները՝ մարդիկ, մեքենասարքավորումներ, հումք, անհրաժեշտ է այնպես բաշխել (օգտագործել), որպեսզի արտադրվի անհրաժեշտ քանակությամբ արտադրանք՝ միաժամանակ մաքսիմալացնելով կամ մինիմալացնելով որևէ նպատակային ֆունկցիա (շահույթ, ծախսեր): Այս խնդիրների նկատմամբ մեծ հետաքրքրությունը բացատրվում է այն հանգամանքով, որ դրանք հանդիպում են ոչ միայն տեսական տնտեսագիտության մեջ, այլև գործնականում, այն է՝ արտադրությունում, առևտրում, կառավարումում, ռազմական գործում և այլն:

Մաթեմատիկական ծրագրավորման ընդհանուր խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ. պահանջվում է գտնել $x_1, x_2, \dots, x_n$ n թվով փոփոխականների այն արժեքները, որոնք բավարարում են հետևյալ m հավասարումները կամ անհավասարումները.

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (4.1)$$

և մաքսիմալացնում կամ մինիմալացնում են.

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.2)$$

ֆունկցիան:

(4.1) պայմանները կոչվում են **սահմանափակումներ**, իսկ (4.1) ֆունկցիան՝ **նպատակային**: Ենթադրվում է, որ $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիաները բացահայտ տեսքով են տրված, իսկ b_i -երը հաստատուն մեծություններ են: m և n մեծություններն իրարից անկախ են, այնպես որ, m -ը կարող է լինել մեծ, փոքր կամ հավասար n -ին: Մասնակի դեպքում m -ը կարող է հավասար լինել զրոյի: Սովորաբար, բոլոր կամ որոշ փոփոխականներ բավարարում են ոչ բացասական լինելու պայմանը, բացի այդ, հնարավոր է, որ դրանց մի մասը կամ բոլորը լինեն **դիսկրետ**:

Եթե (4.1)-ում և (4.2)-ում դիտարկենք հետևյալ տեսքերը.

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.3)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (4.4)$$

որտեղ a_{ij} -երը և c_j -երը հայտնի մեծություններ են, և ավելացնենք բոլոր փոփոխականների ոչ բացասականության պայմանը.

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.5)$$

ապա (4.3)-(4.5) խնդիրը հանդես կգա որպես **գծային ծրագրավորման**: Ակնհայտ է, որ փոփոխականների մի մասի՝ կամայական նշանի լինելու դեպքում դրանց հեշտությամբ կարելի է բերել (4.5) տեսքի սահմանափակումներով խնդրի: Գործնականում մաթեմատիկական ծրագրավորման օգտագործման նկատմամբ հետաքրքրությունն աճեց 1947 թ., երբ Ջ. Դանցիգը համապատասխան խնդրի լուծման համար մշակեց սիմպլեքս մեթոդը:

Այսպիսով՝ քննարկվող գծային ծրագրավորման խնդիրը n թվով x_j փոփոխականների ոչ բացասական արժեքների փնտրման մեջ է, որոնք բավարարում են հետևյալ m թվով սահմանափակումները.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

և մաքսիմալացնում կամ մինիմալացնում են $z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ գծային

ֆունկցիան:

Մաթեմատիկական ծրագրավորման յուրաքանչյուր այլ տեսքի խնդիր, այդ թվում՝ այնպիսի, որտեղ սահմանափակումները և նպատակային ֆունկցիան ունեն (1.3)-(1.4) տեսքը, բայց, միաժամա-

նակ, ենթադրվում է, օրինակ, փոփոխականների ամբողջաթիվ լինելը, համարվում է **ոչ գծային**:

ՈԳԾ խնդիրների լուծման մեթոդներն առավել բարդ են, քան գծային ծրագրավորմանը. դրանց մի քանիսի տեսքի համար մշակված են հաշվարկային մեթոդներ, որոնց ուսումնասիրությամբ էլ կզբաղվենք այս բաժնում:

Դիտարկենք ՈԳԾ խնդիրների հիմնական դասերը: Առավել լավ ուսումնասիրված են նրանք, որոնցում սահմանափակումները գծային տեսքի են, բոլոր փոփոխականները ոչ բացասական են, իսկ նպատակային ֆունկցիան ոչ գծային է: Ընդհանուր դեպքում, այդ խնդիրն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (4.6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (4.7)$$

$$\min \text{ կամ } \max \quad z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.8)$$

որը կարելի է կարդալ այսպես. գտնել x_j փոփոխականների այն ոչ բացասական արժեքները, որոնք բավարարում են (4.6)–(4.7) սահմանափակումները և մաքսիմալացնում կամ մինիմալացնում են $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիան:

Նույնիսկ գծային սահմանափակումներով խնդիրների համար լուծման մեթոդներ մշակվում են միայն այն դեպքում, երբ դրանց նպատակային ֆունկցիաներն օժտված են որոշակի հատկություններով: Դրանցից երկուսը հատուկ հետաքրքրություն են ներկայացնում: Առաջին դեպքում նպատակային ֆունկցիան կարող է ներկայացվել  ֆունկցիաների գումարի տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրը մեկ փոփոխականից կախված ֆունկցիա է, այսինքն՝

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_1) + \dots + f_n(x_n): \quad (4.9)$$

Լուծման լավագույն տարբերակի որոշման հնարավորությունն ապահովելու համար $f_j(x_j), j=\overline{1, n}$ ֆունկցիաների վրա դրվում են լրացուցիչ պայմաններ: Եթե նպատակային ֆունկցիան ներկայացված է (4.9) տեսքով, ապա այն կոչվում է **սեպարաբել**:

Երկրորդ դեպքում նպատակային ֆունկցիան ներկայացվում է որպես գծային և քառակուսային ձևերի գումար: Այսպես.

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j =$$

$$= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d_{11} x_1^2 + d_{12} x_1 x_2 + \dots + d_{1n} x_1 x_n + \dots + d_{nn} x_n^2 : (4.10)$$

Նման ոչ գծային խնդիրները կոչվում են **քառակուսային ծրագրավորման**:

Հաջորդները պատկանում են օպտիմալացման դասական խնդիրների շարքին: Դրանց մասին պատկերացում կազմելու համար վերադառնանք ոչ գծային ծրագրավորման (4.1)-(4.2) խնդրին և ենթադրենք, որ սահմանափակումների մեջ չկան անհավասարումներ, չկան փոփոխականների վրա դրված պայմաններ, $m < n$, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ և $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են և առնվազն՝ կրկնակի ածանցելի: Այդ դեպքում ընդհանուր խնդիրը կներկայացվի հետևյալ տեսքով.

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.11)$$

$$\min \text{ կամ } \max \quad z = f(x_1, x_2, \dots, x_n):$$

Դրանք կոչվում են **մաթեմատիկական ծրագրավորման դասական խնդիրներ**, որոնց առանձնահատկությունն այն է, որ սկզբունքորեն կարող են լուծվել գոնե դիֆերենցիալ հաշվի օգտագործման վրա հիմնված դասական մեթոդներով:

Եթե գծային ծրագրավորման խնդիրները համալրվում են փոփոխականների ոչ բացասական լինելու պայմանով, առաջանում է ՈԳԾ խնդիրների ևս մեկ դաս: Այսպիսի խնդիրները կոչվում են **ամբողջաթիվ ծրագրավորման**, որոնց մաթեմատիկական ձևակերպումը հետևյալն է.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

որտեղ բոլոր x_j -երը կամ դրանց մի մասը ամբողջ թվեր են, **min** կամ **max**՝ $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

Եթե բոլոր փոփոխականները պետք է լինեն ամբողջաթիվ, ապա խնդիրը կոչվում է **լրիվ ամբողջաթիվ**, հակառակ դեպքում՝ **մասնակի ամբողջաթիվ**:

Եթե ՈԳԾ խնդրում նպատակային ֆունկցիան ուռուցիկ (գոգավոր) է, իսկ սահմանափակումները՝ գոգավոր (ուռուցիկ), ապա դա պատկանում է **ուռուցիկ ծրագրավորման խնդիրների** դասին:

Նախքան ՈԳԾ խնդիրների լուծման ուսումնասիրությունը՝ անդրադառնանք գծային ծրագրավորման խնդիրներին բնորոշ առանձնահատկություններին և տանենք զուգահեռներ:

1. Թույլատրելի լուծումների բազմությունը (ո-չափանի տարածության բոլոր այն $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ կետերի բազմությունը, որ բավարարում է (4.6)-(4.7) պայմանները), եթե դատարկ չէ, ապա ուռուցիկ է:

2. ո-չափանի տարածության այն $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ կետերի բազմությունը, որտեղ նպատակային ֆունկցիան ընդունում է տրված արժեքը, **հիպերհարթություն** է: Ընդ որում, նպատակային ֆունկցիայի տարբեր արժեքներին համապատասխանող հիպերհարթությունները միմյանց զուգահեռ են:

3. Նպատակային ֆունկցիայի **տեղային (լոկալ)** մաքսիմումի կամ մինիմումի կետը միաժամանակ **բացարձակ (գլոբալ)** մաքսիմումի կամ մինիմումի կետ է, այսինքն՝ գոյություն չունի նպատակային ֆունկցիայի բացարձակ օպտիմումից տարբերվող տեղային օպտիմում:

Սահմանում: Մաթեմատիկական ծրագրավորման ընդհանուր խնդրում x^* փոփոխականների վեկտորը հանդես կգա որպես **բացարձակ մաքսիմումի կետ**, եթե դա պատկանում է թույլատրելի լուծումների բազմությանը, և այդ կետում նպատակային ֆունկցիայի ընդունած արժեքը փոքր չէ ցանկացած այլ թույլատրելի լուծման դեպքում նպատակային ֆունկցիայի ընդունած արժեքից, այսինքն՝ տեղի ունի հետևյալ առնչությունը.

$$x^* \in X \text{ և } F(x^*) \geq F(x) \text{ բոլոր } x \in X,$$

որտեղ X -ով նշանակվում է թույլատրելի լուծումների բազմությունը:

x^* -ը կհամարվի **խիստ բացարձակ մաքսիմումի կետ**, եթե այդտեղ նպատակային ֆունկցիայի արժեքը չափազանց մեծ է թույլատրելի լուծումների բազմության վրա նպատակային ֆունկցիայի ընդունած ցանկացած այլ արժեքից, այսինքն.

$$F(x^*) > F(x) \text{ բոլոր } x \in X, x \neq x^* :$$

Սահմանում: x^* փոփոխականների վեկտորը հանդես կգա որպես **տեղային մաքսիմումի կետ**, եթե դա պատկանում է թույլատրելի լուծումների բազմությանը, և այդտեղ նպատակային ֆունկցիայի արժեքը փոքր չէ այդ կետի որոշակի փոքր ε շրջակայքում նպատակային ֆունկցիայի ընդունած ցանկացած արժեքից, այսինքն՝ տեղի ունի հետևյալ առնչությունը.

$$x^* \in X \text{ և } F(x^*) \geq F(x) \text{ բոլոր } x \in X \cap N_\delta(x^*):$$

Նմանապես, x^* -ը կկոչվի **խիստ տեղային մաքսիմումի կետ**, եթե այդտեղ նպատակային ֆունկցիայի արժեքն ամենամեծն է այդ կետի որոշակի փոքր շրջակայքում նպատակային ֆունկցիայի ընդունած ցանկացած արժեքից:

Ակնհայտ է, որ բացարձակ մաքսիմումի կետը, միաժամանակ, տեղային մաքսիմումի է, հակառակ պնդումը ճիշտ չէ, քանի որ կարող են գոյություն ունենալ այլ տեղային մաքսիմումի կետեր, որտեղ ֆունկցիան ընդունում է ավելի մեծ արժեքներ:

Եթե վերոհիշյալ սահմանումներում առնչություններն ունենան հակառակ նշաններ, ապա նշված կետերը, համապատասխանաբար, կկոչվեն ֆունկցիայի բացարձակ, խիստ բացարձակ, տեղային, խիստ տեղային մինիմումի կետեր:

4. Եթե գծային ծրագրավորման խնդիրն ունի լավագույն լուծում, ապա թույլատրելի լուծումների բազմության գագաթներից գոնե մեկը նույնպես կլինի լավագույն լուծում: Ընդ որում, թույլատրելի լուծումների բազմության ցանկացած գագաթից սկսելով, վերջավոր թվով քայլերից հետո հնարավոր է հասնել լավագույն գագաթին՝ նպատակասլաց կերպով յուրաքանչյուր քայլում անցում կատարելով ավելի նպատակահարմար հարևան գագաթին: Տվյալ գագաթը կհանդիսանա լավագույն այն և միայն այն դեպքում, եթե նպատակային ֆունկցիայի արժեքը դրանում առնվազն պակաս չլինի բոլոր հարևան գագաթներում այդ ֆունկցիայի արժեքներից:

ՈԳԾ խնդիրներին հատուկ չեն գծային ծրագրավորման խնդիրներին բնորոշ առանձնահատկությունները կամ դրանց մի մասը:

4.2. ՈԳԾ ԽՆԴԻՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՐԱՖԻԿԱԿԱՆ ԵՂԱՆԱԿԸ

Գծային և ոչ գծային խնդիրների տարբերություններն առավել ակնհայտ բնութագրելու համար բերենք մի քանի օրինակներ: Երկու փոփոխականով ՈԳԾ խնդիրները կարելի է լուծել գրաֆիկորեն: Դի-

տարկենք հետևյալ տեսքի ՈԳԾ խնդիր, որի նպատակային ֆունկցիան ոչ գծային է, իսկ սահմանափակումները՝ գծային:

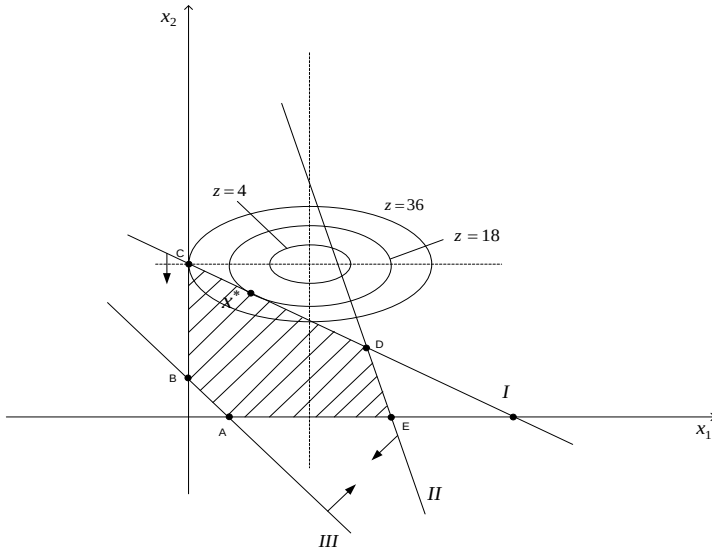
Գտնել

$$\min Z = 4(x_1 - 3)^2 + 16(x_2 - 4)^2,$$

$$\begin{cases} 0,5x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0:$$

Նկատենք, որ խնդիրն ունի սեպարաբել նպատակային ֆունկցիա և (4.6), (4.7), (4.9) տեսքի է: Ակնհայտ է, որ թույլատրելի լուծումների բազմությունն ABCDE հնգանկյունն է, որն ուռուցիկ է (գծապատկեր 4.1):



Գծապատկեր 4.1

Նպատակային ֆունկցիայի **մակարդակի կորերը** (3; 4) կենտրոնով էլիպսներ են: Եթե լավագույն լուծումը նշանակենք՝ $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, իսկ նպատակային ֆունկցիայի նվազագույն արժեքը՝ z^* , ապա գծապատկեր 4.1-ից երևում է, որ այն պետք է բավարարի

հետևյալ պայմանները՝ $0,5x_1^* + x_2^* = 4$ և $z^* = 4(x_1^* - 3)^2 + 16(x_2^* - 4)^2$:

Բացի այդ, x^* կետում էլիպսին տարված շոշափողի անկյունային գործակիցը պետք է հավասար լինի՝ $g(x) = 0,5x_1 + x_2 = 4$ ուղղի անկյունային գործակիցին, հետևաբար՝ առկա է ևս մեկ պայման հետևյալ տեսքով.

$$\frac{z'_{x_1}}{z'_{x_2}} = \frac{g'_{x_1}}{g'_{x_2}} :$$

Այսպիսով՝ կունենանք երեք հավասարում և երեք անհայտ՝ x_1^*, x_2^* , և z^* : Միակ լուծումն է՝ $x_1^* = \frac{3}{2}$, $x_2^* = \frac{13}{4}$, $z^* = 18$:

Կարելի է նկատել, որ նպատակային ֆունկցիան իր նվազագույն արժեքը ստանում է ոչ թե թույլատրելի լուծումների բազմության գագաթում, այլ **եզրային կետում**։ Հետևաբար՝ այս խնդիրների լուծման համար արդյունավետ չէ հաշվարկային այն մեթոդաբանությունը, որը սահմանափակվում է միայն թույլատրելի լուծումների բազմության գագաթների **հատարկումով**։

Արդեն դիտարկված խնդրի նպատակային ֆունկցիայի ոչ մեծ ձևափոխությունը կհանգեցնի այն բանին, որ դա իր նվազագույն արժեքը կստանա թույլատրելի լուծումների բազմության **ներքին կետում**։

Ենթադրենք՝ (4.12) խնդրի նպատակային ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$\min Z = 4(x_1 - 3)^2 + 16(x_2 - 1)^2,$$

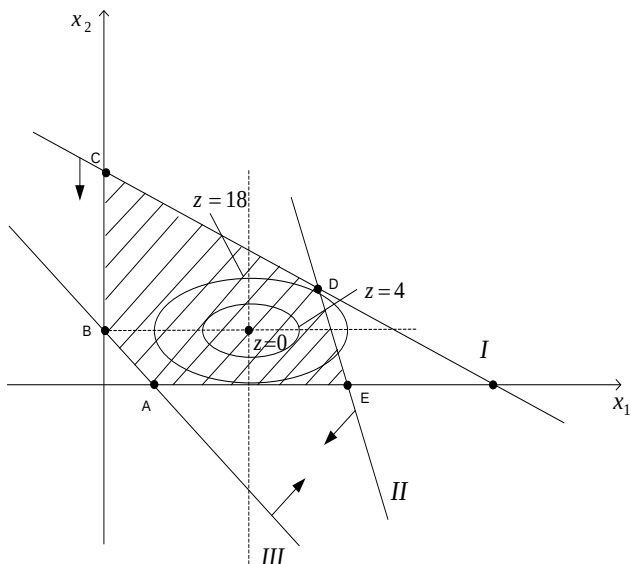
իսկ թույլատրելի լուծումների բազմությունը թողնենք անփոփոխ (գծապատկեր 4.2)։

Այդ դեպքում լավագույն լուծումը և նպատակային ֆունկցիայի օպտիմալ արժեքը կլինեն համապատասխանաբար՝ $x_1^* = 3$, $x_2^* = 1$, $z^* = 0$ ։ Նշենք, որ դիտարկված օրինակում նպատակային ֆունկցիայի նվազագույն արժեքը նույնն է սահմանափակումների առկայության կամ դրանց բացակայության դեպքում։ Այսպիսի դեպքերում ասում են, որ սահմանափակումներն **էական** չեն։

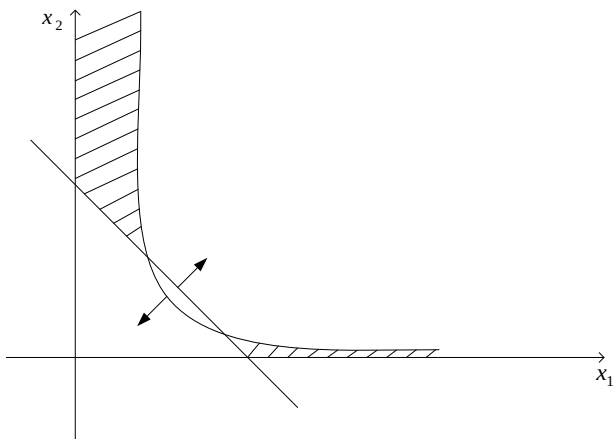
Եթե ՈԳԾ խնդրի սահմանափակումները ոչ գծային են, ապա թույլատրելի լուծումների բազմությունը կարող է ուռուցիկ չլինել։ Ավելին, այն կարող է բաղկացած լինել միմյանց հետ **չկապակցված** ենթաբազմություններից։ Ենթադրենք՝ խնդրի սահմանափակումներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} (x_1 - 1)x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 3,5 \end{cases} :$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



Գծապատկեր 4.2



Գծապատկեր 4.3

Այս դեպքում թույլատրելի լուծումների բազմությունը բաղկացած է երկու առանձին մասերից (զծապատկեր 4.3), հետևաբար՝ այն ուռուցիկ չէ: Եթե թույլատրելի լուծումների բազմությունն ուռուցիկ չէ, ապա կարող են գոյություն ունենալ ինչպես բացարձակ լավագույն, այնպես էլ տարբեր տեղային լավագույն կետեր նույնիսկ զծային նպատակային ֆունկցիայի դեպքում:

4.3. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԴԱՍԱԿԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԼԱԳՐԱՆԺԻ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿԻՉՆԵՐԻ ԵՂԱՆԱԿԸ

Ինչպես արդեն նշվեց, մաթեմատիկական ծրագրավորման դասական խնդիրը փոփոխականների այնպիսի արժեքների որոշման մեջ է, որոնք բավարարում են հավասարման տեսք ունեցող սահմանափակումները և նպատակային ֆունկցիային հաղորդում են առավելագույն կամ նվազագույն արժեք: Մաքսիմումի պահանջով խնդրի դեպքում մաթեմատիկական ծրագրավորման դասական խնդիրն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} \max F(x), \\ g(x) = b, \end{aligned} \quad (4.13)$$

կամ բացված տեսքով՝

$$\begin{aligned} \max F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m : \end{aligned} \quad (4.14)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ փոփոխականները կազմում են $n \times 1$ -չափանի x սյուն-վեկտորը, $F(x)$ -ը նպատակային ֆունկցիան է, իսկ $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ -երը $m \times 1$ -չափանի սահմանափակումների սյուն-վեկտորի բաղադրիչներն են: b սյուն-վեկտորը բաղկացած է սահմանափակումների ազատ անդամներից՝ $b_1, b_2, \dots, b_m$:

Ենթադրենք՝ փոփոխականների n և սահմանափակումների m բանականները վերջավոր են, և տեղի ունի $n > m$ առնչությունը, ինչպես նաև $F(x)$ և $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ ֆունկցիաներն անընդհատ են ու դիֆերենցելի և չեն պարունակում պատահական մեծություններ: $n-m$ -ը կոչենք խնդրի **ազատության աստիճան**: b վեկտորը բաղկացած է ամրագրված իրական քվերից: x -ը իրական բաղադրիչներից կազմված ցանկացած վեկտոր է, որը բավարարում է (4.14) սահմանափակումները:

Երկրաչափորեն (4.14) սահմանափակումների համակարգի ցանկացած $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i$, $i=\overline{1,m}$ հավասարությանը n -չափանի էվկլիդյան տարածության մեջ համապատասխանում է կետերի m բազմություն, իսկ այդ բոլոր m բազմությունների հատումը ներկայացնում է թույլատրելի լուծումների բազմություն:

$$X = \{x \in E^n | g(x) = b\}:$$

Այստեղ նույնպես սահմանվում են նպատակային ֆունկցիայի՝ «մակարդակի մակերևույթ» և «գրադիենտ» (ամենաարագ աճի ուղղություն) հասկացությունները, համապատասխանաբար.

$$\{x \in E^n | F(x) = \text{const}\},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right):$$

Խնդրի երկրաչափական մեկնաբանությունը հետևյալն է. թույլատրելի լուծումների բազմության մեջ որոնվում է այն կետը (կամ կետերի բազմությունը), որին համապատասխանում է նպատակային ֆունկցիայի ամենամեծ արժեքի մակարդակի մակերևույթը (գրադիենտ վեկտորի ուղղությամբ ամենաշատ հեռացվածը):

Թվարկենք մաթեմատիկական ծրագրավորման դասական խնդրի լուծման հիմնական քայլերն ըստ **Լագրանժի բազմապատկիչների եղանակի**:

Առաջին քայլում ներմուծվում է m հատ նոր փոփոխականներից բաղկացած տող-վեկտոր.

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m),$$

որը կոչվում է **Լագրանժի բազմապատկիչներ**:

Երկրորդ քայլում կիրառվում է **Լագրանժի ֆունկցիան**, որն ունի հետևյալ տեսքը.

$$L(x, y) = F(x) + y(b - g(x)),$$

կամ բացված տեսքով՝

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m y_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)):$$

Կարելի է նկատել, որ երկրորդ քայլով փորձ է արվում **պայմանական էքստրեմումի խնդիրը** բերել **ոչ պայմանական էքստրեմումի խնդրի** և օգտվել վերջինիս լուծման հայտնի մեթոդներից:

Երրորդ քայլում որոնվում է (x^*, y^*) , այսպես կոչված՝ **ստացիոնար** կետը (կետերը), որտեղ Լագրանժի ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները դառնում են 0.

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*) - y^* \frac{\partial g}{\partial x}(x^*) = 0, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x^*, y^*) = b - g(x^*) = 0: \quad (4.16)$$

(4.15)-ից ունենք.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x^*) = y^* \frac{\partial g}{\partial x}(x^*), \quad (4.17)$$

որտեղ $\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)$ -ը սահմանափակումների ֆունկցիաների **Յակոբիի**

մատրիցն է x^* կետում.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix} :$$

Այսինքն՝ (4.17)-ից ստացվում է, որ նպատակային ֆունկցիայի գրադիենտը x^* կետում ներկայացնում է սահմանափակումների

Յակոբիի մատրիցի սյուների գծային կոմբինացիան: (4.17)-ը բացված տեսքով գրելու դեպքում կունենանք.

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \sum_{i=1}^m y_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \quad j=1, 2, \dots, n:$$

(4.16)-ի m պայմանները ներկայացնում են $g(x^*) = b$ սահմանափակումների համակարգը:

Համատեղ լուծելով (4.15) և (4.16)՝ $n+m$ հավասարումների համակարգը՝ կստանանք $n+m$ անհայտների՝ $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ փոփոխականների և $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ Լագրանժի բազմապատկիչների արժեքները: Եթե կատարվում են նաև ներքոհիշյալ որոշակի բավարար պայմանները, ապա x^* կետը կլինի մաթեմատիկական ծրագրավորման դասական խնդրի տեղային լուծումը: Կարելի է նկատել, որ x^* -ը բավարարում է (4.14) սահմանափակումները և մաքսիմալացնում Լագրանժի ֆունկցիան, որը (x^*, y^*) կետում ուղղակի համընկնում է նպատակային ֆունկցիայի արժեքի հետ.

$$L(x^*, y^*) = F(x^*):$$

Երկրաչափորեն մեկնաբանենք $n+m$ պայմանները.

$$\left. \begin{aligned} g(x^*) &= b, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x^*) &= y^* \frac{\partial g}{\partial x}(x^*) \end{aligned} \right\}:$$
(4.18)

Նկատենք, որ i -րդ սահմանափակմանը համապատասխանող կորն է.

$$g_i(x) = b_i,$$

որի դեպքում սահմանափակումների i -րդ ֆունկցիայի գրադիենտը՝

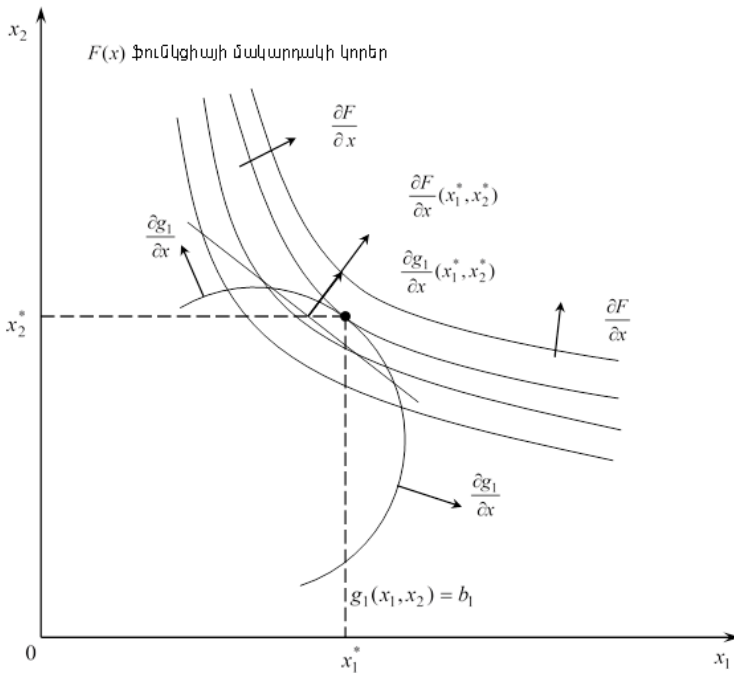
$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}, \frac{\partial g_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g_i}{\partial x_n} \right),$$

որը միաժամանակ Յակոբիի մատրիցի i -րդ տողն է, կլինի **օրթոգոնալ** այդ կորին, քանի որ.

$$dg_i(x) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m:$$

Այսպիսով՝ (4.18) պայմանները ցույց են տալիս, որ x^* -ը պատկանում է թույլատրելի լուծումների բազմությանը, և նպատակային ֆունկցիայի գրադիենտ վեկտորը x^* կետում ներկայացնում է այդ կետում սահմանափակումների ֆունկցիաների գրադիենտների գծային կոմբինացիան՝ կշռված Լագրանժի y^* բազմապատկիչներով:

Երկչափ դեպքի համար մաթեմատիկական ծրագրավորման դասական խնդրի երկրաչափական լուծումն արտացոլված է գծապատկեր 4.4-ում:



Գծապատկեր 4.4

Ոչ պայմանական էքստրեմումի խնդրի լուծման մեթոդներ, այստեղ ևս լավագույն լուծման գոյության երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմանները կլինեն Լագրանժի ֆունկցիայի **Յեսսեի մատրիցի**, կազմված ըստ $x_1, x_2, \dots, x_n$ փոփոխականների, (x^*, y^*) կետում **կիսաորոշյալ** լինելը:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(x^*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(x^*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(x^*) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(x^*) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

ինչպես նաև հետևյալ պայմանի տեղի ունենալը.

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*) dx = 0: \quad (4.20)$$

(4.19) և (4.20) պայմաններին համարժեք, կարելի է ներկայացնել $(m=n) \cdot (m=n)$ -չափանի՝ Հեսսեի հետևյալ սահմանազատված մատրիցի՝

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

վերջին՝ $n-m$ գլխավոր մինորների նշաններին վերաբերող $n-m$ պայմանները:

Տեղային մաքսիմումի երկրորդ կարգի անհրաժեշտ պայմաններն այս դեպքում վերաբերում են Հեսսեի սահմանազատված մատրիցի վերջին՝ $n-m$ գլխավոր մինորների նշաններին, որոնք պետք է հերթափոխեն իրար, ընդ որում, դրանցից առաջին մինորի նշանը պետք է լինի $(-1)^{m+1}$, հակառակ դեպքում՝ գտնվածը տեղային մինիմումի կետ է:

4.4. ԿՈՒՆ-ԹԱԿԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼՈՒԹՅԱՆ ԱՆՅՐԱԺԵՇՏ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

Վերլուծենք ՈԳԾ հետևյալ տեսքի խնդիրը.

$$\max F(x)$$

$$g(x) \leq b, \quad (4.21) \quad x \geq 0:$$

(4.21) խնդրում անհավասարման տեսքով սահմանափակումները դարձնենք հավասարումներ՝ ներմուծելով m ՝ ոչ բացասական, օժանդակ փոփոխականներից բաղկացած վեկտորը.

$$s \equiv b - g(x) = (s_1, s_2, \dots, s_m):$$

Այժմ խնդիրը կստանա հետևյալ տեսքը.

$$\max F(x),$$

$$g(x) + s = b, \quad (4.22) \quad x \geq 0, s \geq 0:$$

(4.22) տեսքով խնդրի համար կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան և դիտարկենք ստացված խնդիրը.

$$\max \Lambda = F(x) + y(b - g(x) - s), \quad (4.23)$$

$$x \geq 0, s \geq 0:$$

Այստեղ $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ -ը Լագրանժի բազմապատկիչներն են: Եթե չլինեն x և s փոփոխականների ոչ բացասական լինելու պայմանը, ապա (4.23)-ը կդառնար մաթեմատիկական ծրագրավորման դասական խնդիր, որի դեպքում օպտիմալությանն անհրաժեշտ պայմաններ կլինեին Λ ֆունկցիայի՝ ըստ x, y, s փոփոխականների մասնակի ածանցյալների 0 լինելը: Սակայն, եթե հաշվի ենք առնում x և s փոփոխականների ոչ բացասական լինելը, ապա (4.23) տեսքով խնդրի օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները ստանում են հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial g}{\partial x} \leq 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} x = \left(\frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial g}{\partial x} \right) x = 0,$$

$$x \geq 0,$$

$$(4.23)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = b - g(x) - s = 0, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial s} = -y \leq 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial s} s = -ys = 0,$$

$$s \geq 0:$$

(4.23)-ում, s վեկտորը փոխարինելով $b - g(x)$ -ով, կստանանք
Կուն-Թակերի օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանները.

$$\frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial g}{\partial x} \leq 0,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} - y \frac{\partial g}{\partial x} \right) x = 0,$$

$$x \geq 0, \tag{4.23}$$

$$b - g(x) \geq 0,$$

$$y(b - g(x)) = 0,$$

$$y \geq 0:$$

(4.24) պայմանները կարելի է ստանալ նաև այն դեպքում, եթե սկզբնական (4.21) խնդրի Լագրանժի ֆունկցիան ձևակերպվի հետևյալ կերպ.

$$L = L(x, y) = F(x) + y(b - g(x)),$$

կամ բացված տեսքով.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m y_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

իսկ Կուն-Թակերի պայմաններն այժմ կունենան հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_j} x_j = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) x_j = 0,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial L}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^m y_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m:$$

(4.25) պայմանները բավարարող (x^*, y^*) զույգը կոչվում է $L(x, y)$ ֆունկցիայի **թամբային կետ**, իսկ (4.25) պայմանները՝ **Կուն-Թակերի օպտիմալության պայմաններ**: $L(x, y)$ ֆունկցիայի թամբային կետը մաքսիմալացնում է $L(x, y)$ ֆունկցիան՝ ըստ x փոփոխականների և մինիմալացնում այն՝ ըստ L ագրանժի y բազմա-պատկիչների: Ակնհայտ է, որ (x^*, y^*) զույգը պետք է բավարարի հետևյալ անհավասարումը.

$$L(x, y^*) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x^*, y), \quad (4.26)$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0:$$

(4.26) պայմանը բավարարող ոչ բացասական (x^*, y^*) վեկտորների որոնման խնդիրը կոչվում է **թամբային կետի խնդիր**:

4.5. ԿՈՒՆ-ԹԱԿԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

Դիտարկենք ՈԳԾ տեսքի հետևյալ խնդիրը՝ $\max F(x)$, $g(x) \leq b$, (4.275.1) $x \geq 0$:

Նշանակենք $X = \{x \in E^n | g(x) \leq b\}$ -ով (4.27) խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունը:

Թեորեմ: Եթե (x^*, y^*) -ը ՈԳԾ խնդրի L ագրանժի ֆունկցիայի թամ-

բային կետ է $x \in X$, $y \geq 0$ բազմության մեջ, ապա x^* -ը ՈԳԾ խնդրի լավագույն լուծումն է:

Ապացույց:

Դիցուք՝ (x^*, y^*) -ը թամբային կետ է, ուստի x^* -ը մաքսիմալացնում է Լագրանժի ֆունկցիան՝ ըստ բոլոր $x \geq 0$, իսկ y^* -ը մինիմալացնում այն՝ ըստ բոլոր $y \geq 0$, այսինքն, ինչպես արդեն գիտենք, տեղի ունի հետևյալ պայմանը.

$$L(x, y^*) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x^*, y),$$

որը բացված տեսքով գրելու դեպքում կունենանք.

$$F(x) + y^*(b - g(x)) \leq F(x^*) + y^*(b - g(x^*)), \quad (4.27)$$

$$F(x^*) + y^*(b - g(x^*)) \leq F(x^*) + y(b - g(x^*)): \quad (4.28)$$

(4.28) անհավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$(y - y^*)(b - g(x^*)) \geq 0, y \geq 0: \quad (4.29)$$

Պարզ է, որ երկրորդ արտադրիչը ոչ բացասական է: Եթե $y = 0$, ապա (4.29)-ից կունենանք.

$$y^*(b - g(x^*)) = 0, \quad (4.30)$$

քանի որ $y^* \geq 0$, և $(b - g(x^*)) \geq 0$: (4.30)-ը տեղադրենք (4.27)-ում.

$$F(x^*) \geq F(x) + y^*(b - g(x)), x \geq 0: \quad (4.31)$$

Եթե x -ը թույլատրելի լուծում է, ապա հաշվի առնելով, որ $y \geq 0$, (5.1)-ից կունենանք.

$$F(x^*) \geq F(x): \quad (4.32)$$

Այսպիսով՝ x^* -ը մաքսիմալացնում է $F(x)$ ֆունկցիան:

Սահմանում: $X = \{x \in E^n | g(x) \leq b\}$ բազմությունը բավարարում է **կանոնավորության (ռեգուլյարության)** պայմանը, եթե գոյություն ունի այնպիսի x^0 վեկտոր, որ $x^0 \geq 0$ և $g(x^0) < b$:

Այժմ ենթադրենք՝

$$\begin{aligned} \max F(x) \\ g(x) \leq b, \\ x \geq 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

(4.33) խնդրում $F(x)$ -ը գոգավոր ֆունկցիա է, իսկ $g(x)$ ֆունկցիաներն ուռուցիկ են:

Կուն-Թակերի թեորեմը: Եթե X բազմությունը բավարարում է կանոնավորության պայմանը, ապա, որպեսզի x^* կետը հանդիսանա (4.29) խնդրի լավագույն լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա $y^* \geq 0$ վեկտոր՝ այնպիսի, որ (x^*, y^*) -ը լինի Լագրանժի ֆունկցիայի թանձրային կետ:

ԳԼՈՒԽ 5

ԱՄԲՈՂՋԱԹԻՎ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

5.1. ԱՄԲՈՂՋԱԹԻՎ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԻ ԴՐՎԱԾՔԸ

Դիտարկենք մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիրներ, որոնցում փոփոխականները պետք է բավարարեն ամբողջաթիվ արժեքներ ընդունելու լրացուցիչ պայմանը: Այսպիսով՝ խնդիրը կոչվում է **լրիվ ամբողջաթիվ ծրագրավորման**, եթե **բոլոր** անհայտներին առաջադրված է ամբողջաթիվ լինելու պայմանը, և **մասամբ ամբողջաթիվ**, եթե **որոշ** անհայտների է առաջադրված տվյալ պայմանը: ԱԾԽ-ն ՈԳԾԽ-ի մասնակի դեպք է, սակայն գծային նպատակային ֆունկցիայի և գծային սահմանափակումների առկայության պատճառով երբեմն անճշտորեն կոչում են «ամբողջաթիվ ԳԾԽ»:

Ձևակերպենք լրիվ ԱԾԽ խնդիրը.

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{ext}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, \geq, =) b_i \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \quad \text{ամբողջ թվեր են:}$$

Նախքան լուծմանն անցնելը դիտարկենք հետևյալ տնտեսագիտական խնդիրը: Ենթադրենք՝ մեքենաշինական գործարանի տնօրենը թողարկվելիք արտադրանքի ծավալը մեծացնելու նպատակով որոշել է տեղադրել նոր հաստոցներ, որոնց համար հատկացրել է 19/3 մ² տարածք: Հաստոցների ձեռքբերման համար տրամադրվել է 10.000 ԱՄՆ \$: Շուկայում առկա են երկու տեսակի հաստոցներ: Առաջին տեսակի հաստոցն արժե 1000, իսկ երկրորդ տեսակինը՝ 3000 ԱՄՆ \$: Ընդ որում, հետազոտությունների ընթացքում պարզ է դարձել, որ առաջին տեսակի հաստոցը մեկ հերթափոխի ընթացքում թողարկվելիք արտադրանքի ծավալը կմեծացնի երկու միավորով, իսկ երկրորդ տեսակինը՝ չորս միավորով: Անհրաժեշտ է որոշել տվյալ հաստոցների **օպտիմալ քանակները**, որոնք

կապահովեն թողարկվող արտադրանքի առավելագույն աճ: Ընդ որում, առաջին տեսակի հաստոցը տեղադրելու համար անհրաժեշտ է 2 մ^2 , իսկ երկրորդ տեսակինը տեղադրելու համար՝ 1 մ^2 տաճք:

Խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը կազմելու նպատակով կատարենք հետևյալ նշանակումները.

x_1 -ն առաջին տեսակի հաստոցների թիվն է,

x_2 -ը երկրորդ տեսակի հաստոցների թիվն է:

Խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը կունենա հետևյալ տեսքը.

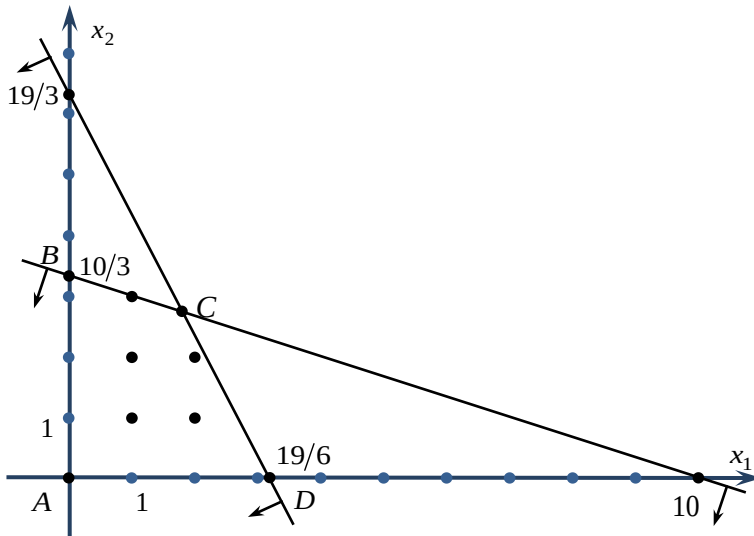
$$F(x) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \quad (5.1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 19/3 \quad (5.2)$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 10$$

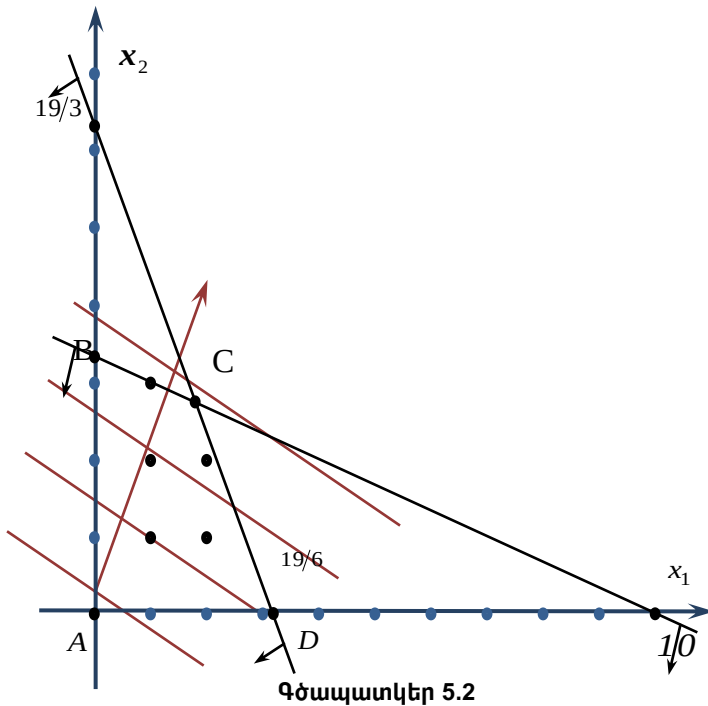
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{ամբողջ թվեր են:} \quad (5.3)$$

(5.1)-(5.3)-ը ԱԾԽ է, որը նախ՝ փորձենք լուծել երկրաչափորեն (գծապատկեր 5.1).



Գծապատկեր 5.1

(5.1)-(5.3) խնդրի ԹԼԲ-ն առանց ամբողջ թվային լինելու պայմանի կլինի $ABCD$ քառանկյունը, որը բաղկացած է գծապատկեր 5.1-ում պատկերված ամբողջաթիվ կոորդինատներով 12 կետից: ԱՇԽ-ն ուռուցիկ ծրագրավորման խնդիր չէ, քանի որ դրա ԹԼԲ-ն **կապակցված չէ**, հետևաբար՝ **ուռուցիկ չէ**: Լավագույն լուծումը կարելի է գտնել՝ թույլատրելի լուծումները կետ առ կետ **հատարկելով**, սակայն եթե ԹԼԲ-ն պարունակի ավելի մեծ թվով ամբողջ թվային կոորդինատներով կետեր, ապա հատարկելը կդառնա բավական ժամանակատար աշխատանք (գծապատկեր 5.2):



Այդ իսկ պատճառով կառուցենք նպատակային ֆունկցիայի գրադիենտը և պատկերենք վերջինիս ուղղահայաց մակարդակի կորերը:

Այսպիսով՝ խնդրի լավագույն լուծումը $(1,3)$ կետն է, իսկ $F_{max}=14$ -ի, ինչը նշանակում է, որ գործարանը պետք է ձեռք բերի առաջին տեսակի հաստոցից մեկ հատ, իսկ երկրորդ տեսակից՝ երեք հատ՝ արդյունքում ապահովելով մեկ հերթափոխի ընթացքում 14 միավորով արտադրանքի աճ:

ԱԾԽ-ն լուծելու համար Ջ. Բ. Դանցիգը առաջարկել է հատույթների եղանակը, որի էությունը հետևյալն է. ենթադրենք՝ ԱԾԽ-ն առանց փոփոխականների ամբողջաթիվ լինելու պայմանի լուծելուց հետո ստացվել է այնպիսի լավագույն լուծում, որը ամբողջ թվային չէ (հակառակ դեպքը քննարկելն իմաստ չունի): Այնուհետև խնդրի սահմանափակումներին ավելացվում է ևս մեկը, որին ոչ ամբողջաթիվ լուծումը չի բավարարում, իսկ մնացած թույլատրելի ամբողջաթիվ լուծումները բավարարում են: Հետո լուծվում է նոր ստացված ԳԾԽ-ն: Գոյություն ունեն սահմանափակումների ավելացման տարբեր եղանակներ: Պարզ է, որ ավելացվող սահմանափակման ընտրվող եղանակը ձևավորում է խնդիրների որոշակի հաջորդականություն: Ներկայացնենք Ռալֆ Հոմորիի՝ 1958 թ. առաջարկած ալգորիթմը:

5.2. ՀՈՍՈՐԻԻ ԱԼԳՈՐԻԹՄԸ

Նախ՝ լուծենք (5.1)-(5.3) ԱԾԽ-ն սիմպլեքս ալգորիթմով, ընդ որում, վերջին սիմպլեքս աղյուսակը կունենա ստորև ներկայացված տեսքը, որտեղ $X^* = (x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{k0}, 0, \dots, 0)$:

	$-x_{k+1}$	...	$-x_j$	...	$-x_n$	1
x_1	x_{1k+1}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	x_{10}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	x_{ik+1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	x_{i0}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k	x_{kk+1}	...	x_{kj}	...	x_{kn}	x_{k0}
F						C

Ենթադրենք՝ ստացված $x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{k0}$ ամբողջ թվեր չեն: Կառուցենք այնպիսի առաջին աստիճանի անհավասարում, որին ստացված լավագույն լուծումը չի բավարարի, իսկ բոլոր թույլատրելի ամբողջաթվային լուծումները կբավարարեն:

Դիտարկենք հետևյալ բանաձևը.

$$x_i = x_{i0} - \sum_{j \in B} x_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m, \text{ որտեղ } B = \{j \mid j = k+1, \dots, n\}:$$

Ձևափոխենք այն.

$$x_i = [x_{i0}] + \{x_{i0}\} - \sum_{j \in B} [x_{ij}] x_j - \sum_{j \in B} \{x_{ij}\} x_j^1{}^1.$$

Որպեսզի x_i -ը լինի ամբողջ թիվ, պետք է $\{x_{i0}\} - \sum_{j \in B} \{x_{ij}\} x_j$ արտահայտությունը լինի ամբողջ թիվ: Կատարենք հետևյալ նշանակումը՝ $z = \{x_{i0}\} - \sum_{j \in B} \{x_{ij}\} x_j$: Ցույց տանք, որ $z \leq 0$: Կատարենք հաշվարկներ $z > 0$: Քանի որ $\{x_{i0}\} < 1$, ուստի $0 < z < 1$: Փաստորեն, եկանք հակասության, քանի որ $(0,1)$ միջակայքում ամբողջ թիվ գոյություն չունի, հետևաբար՝ $z \leq 0$:

Սահմանում: $\sum_{j \in B} \{x_{ij}\} x_j \geq \{x_{i0}\}$ արտահայտությունը կոչվում է **Հո-**

մորիի առաջին սահմանափակում (հատույթ):

Լավագույն լուծումը, որն ամբողջաթվային չէ, չի բավարարի Հոմորիի առաջին սահմանափակումը, քանի որ $\{x_{i0}\} > 0$,

$$\sum_{j \in B} \{x_{ij}\} x_j = 0, \quad x_j = 0 \quad j \in B, \text{ հետևաբար՝ ստացվում է հակասություն:}$$

սուբյուն: (5.1)–(5.3) խնդրի ամբողջաթիվ թույլատրելի լուծումների բազմությունը բավարարում է այդ սահմանափակումը, հետևաբար՝ այն **կանոնավոր (ռեգուլյար) հատույթ** է: Ընդ որում, ապացուցվում է, որ լավագույն լուծումն ստացվում է վերջավոր թվով քայլերից հետո:

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը: Դիցուք՝ ԱԾԽ-ն սինպլեքս ալգորիթով լուծելուց հետո ստացվել է հետևյալ ընթացիկ աղյուսակը.

	$-x_1$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1
x_6	1	0	1/7	-3/7	12/7
x_2	0	1	1/7	4/7	12/7
F	0	0	1/7	4/7	12/7

¹ Ցանկացած թիվ կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ. $a = [a] + \{a\}$, որտեղ $[a]$ -ն a թվի ամբողջ, իսկ $\{a\}$ -ն a թվի կոտորակային մասն է, ընդ որում, $0 \leq \{a\} < 1$, օրինակ՝ $6.5 = 6 + 0.5$, իսկ $-7.3 = -8 + 0.7$:

Եթե խնդիրը մաքսիմալացման պահանջով է, ապա լավագույն լուծումն է՝ $X^* = (0; 12/7; 0; 0; 0; 12/7)$, $F_{\max} = 12/7$ (հաշվի չի առնվել անհայտների ամբողջաթվային լինելու պայմանը): Կազմելով **Յոմորիի առաջին հատույթը** երկրորդ տողի համար՝ արդյունքում կունենանք.

$$\{0\}x_1 + \{1\}x_3 + \{1/7\}x_4 + \{4/7\}x_5 \geq \{12/7\}$$

$$1/7x_4 + 4/7x_5 \geq 5/7$$

$$x_4 + 4x_5 \geq 5$$

$$x_7 = x_4 + 4x_5 - 5:$$

Ստացված նոր սահմանափակումը ներմուծելով աղյուսակի մեջ՝ կստանանք.

	$-x_1$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	1
x_6	1	0	1/7	-3/7	12/7
x_2	0	1	1/7	4/7	12/7
x_7	0	0	-1	-4	-5
F	0	0	1/7	4/7	12/7

Ազատ անդամների սյան մեջ, բացասական թվի առկայությամբ պայմանավորված, անհրաժեշտ է վերադառնալ սինպլեքս ալգորիթի 3-րդ փուլին և արտաքսել -5 բացասական թիվը: Արտաքսելուց հետո կստանանք հետևյալ աղյուսակը.

	$-x_1$	$-x_3$	$-x_7$	$-x_5$	1
x_6	1	0	1/7	-1	1
x_2	0	1	1/7	0	1
x_4	0	0	-1	4	5
F	0	0	1/7	0	1

Նպատակային ֆունկցիայի տողի և ազատ անդամների սյան տարրերի ոչ բացասական և ամբողջաթիվ լինելու փաստը վկայում

է, որ խնդիրը լուծվել է, ընդ որում, $X^* = (0; 1; 0; 5; 0; 1; 0)$,
 $F_{max} = 1$:

Մասամբ ամբողջաթիվ ծրագրավորման խնդիրների լուծման համար կիրառվում է **Հոմորիի երկրորդ հատույթը**.

$$\{a_{s0}\} - \sum a_{sk} x_k \leq 0,$$

որտեղ a_{sk} -երը հետևյալ բանաձևերով որոշվող գործակիցներ են.

1) այն X_k փոփոխականների համար, որոնց առաջադրված չէ ամբողջաթվային լինելու պայմանը`

$$a_{sk} = \begin{cases} \frac{a_{sk}}{\{a_{s0}\}}, & \text{եթե } a_{sk} \geq 0 \\ \frac{\{a_{s0}\}}{1 - \{a_{s0}\}} \cdot |a_{sk}|, & \text{եթե } a_{sk} < 0 \end{cases}$$

2) այն X_k փոփոխականների համար, որոնց առաջադրված է ամբողջաթվային լինելու պայմանը`

$$a_{sk} = \begin{cases} \frac{a_{sk}}{\{a_{s0}\}}, & \text{եթե } \{a_{sk}\} \leq \{a_{s0}\} \\ \frac{\{a_{s0}\}}{1 - \{a_{s0}\}} \cdot (1 - \{a_{sk}\}), & \text{եթե } \{a_{sk}\} > \{a_{s0}\} \end{cases}$$

ԴԻՆԱՄԻԿ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Դինամիկ ծրագրավորումը (ԴԾ) հնարավորություն է տալիս բարդ օպտիմալացման խնդրի լուծումը հանգեցնելու մի շարք ավելի պարզ խնդիրների հաջորդական լուծմանը: Դինամիկ ծրագրավորման խնդիրներն ունեն որոշակի առանձնահատկություններ, որոնցից հատկանշական են.

- համապատասխան խնդիրը լուծվում է փուլ առ փուլ, ընդ որում, յուրաքանչյուր փուլում առկա է միայն մեկ կառավարվող փոփոխական,
- խնդրի լուծման ընթացքում օգտագործվում են **անդրադարձ հավասարումներ**, որոնց միջոցով փուլերը կապվում են միմյանց հետ, ընդ որում, լավագույն լուծումն ապահովվում է վերջին փուլում,
- կիրառվում է **ընկղմման սկզբունքը**, երբ խնդրի պատասխանը գտնելու համար լուծվում են համանման, ավելի պարզ խնդիրներ:

Եթե գծային և ոչ գծային ծրագրավորման խնդիրների համար գոյություն ունեն լուծման որոշակի մեթոդներ, ապա ԴԾ խնդիրների համար միօրինակ մոտեցումներ առկա չեն:

ԴԾ եղանակով խնդիրների լուծումը, սովորաբար, կատարվում է գրաֆների և ցանցերի միջոցով:

Դիտարկենք $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ վերջավոր և $L \subseteq V \times V$ կարգավորված գույգերի բազմությունները:

Սահմանում: $G = (V, L)$ զույգը կոչենք կողմնորոշված **գրաֆ**:

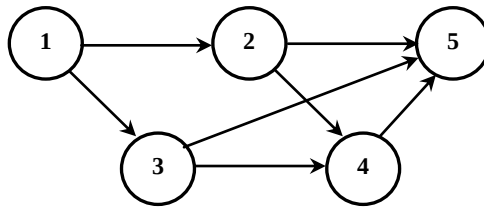
V բազմության տարրերն անվանենք կողմնորոշված գրաֆի գագաթներ, իսկ L բազմության տարրերը՝ կողեր կամ աղեղներ:

Գրաֆը հարթության վրա պատկերվում է հետևյալ կերպ.

- գագաթները նշում ենք՝ հարթության մեջ՝ իրարից տարբերվող կետերով կամ շրջանակներով,
- աղեղները՝ գագաթներն իրար միացնող անընդհատ գծի տեսքով, որը չի անցնում որևէ այլ գագաթի համապատաս-

խանող կետով, օրինակ՝ (v_i, v_j) աղեղը v_i և v_j գագաթները միացնող անընդհատ գիծ է՝ սլաքն ուղղված դեպի v_j գագաթը:

Սահմանում: Գագաթների $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ հաջորդականությունը կոչվում է v_{i_1} -ից v_{i_k} **ուղի**, և գրում ենք՝ $v_{i_1} \rightarrow v_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i_{k-1}} \rightarrow v_{i_k}$, եթե $(v_{i_s}, v_{i_{s+1}}) \in L, s=1, \dots, k-1$, աղեղներն իրարից տարբեր են, որտեղ v_{i_1} -ը կոչվում է սկզբնական, v_{i_k} -ն՝ վերջնական գագաթ: Օրինակի միջոցով ներկայացնենք կողմնորոշված գրաֆը, որը կազմված է գագաթներից և աղեղներից (կողերից):



Գծապատկեր 6.1

Գծապատկերում պատկերված կողմնորոշված գրաֆի համար.

գագաթների բազմությունն է՝ $V = \{1; 2; 3; 4; 5\}$,

աղեղների բազմությունն է՝ $L = \{(1;2), (1;3), (2;4), (3;4), (2;5), (3;5)\}$,

ուղիներ են՝ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ -ը, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ -ը, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ -ը և այլն:

Կողմնորոշված գրաֆի աղեղներին կարելի է վերագրել թվեր, որոնք ցույց են տալիս, օրինակ, բնակավայրերի միջև հեռավորությունը կամ ճանապարհի ծախսը, խողովակաշարի թողունակությունը, ներդրվող գումարից ստացվող շահույթը և այլն: **Ցանց** կոչվում է այն կողմնորոշված գրաֆը, որի աղեղներին վերագրված են ոչ բացասական արժեքներ, որոնք կարող ենք անվանել կշիռ կամ թողունակություն, առանձնացված են սկզբնական և վերջնական գագաթներ:

ԴՕ հիմնական հասկացություններն են՝ փուլ, վարվելակերպ (վարք), օպտիմացման սկզբունքներ, որոնք փորձենք մեկնաբանել ցանցերի լեզվով:

Ցանցում կամայական վիճակը ներկայացվում է որպես գագաթ, որից դուրս եկող աղեղների բազմությունը նկարագրում է հա-

մապատասխան վիճակը բնութագրող վարվելակերպերի բազմությունը: Հասկանալի է, որ եթե ունենք որոշակի նպատակ (համաձայն խնդրի պահանջի), ապա կամայական վիճակում (գազաթում) գտնվելիս, ընտրելով այդ վիճակի (գազաթի) համար լավագույն լուծումը (վարվելակերպը), օգտվելով դիմամիկ ծրագրավորման օպտիմացման սկզբունքից, կարող ենք գտնել վերջնական լուծումը, որը կոչենք լավագույն վարք (ուղի):

Այսինքն՝ ցանցում **լավագույն վարք (լավագույն ուղի)** ասելով հասկանում ենք ցանցի սկզբնական գազաթը վերջնական գազաթին միացնող ամենակարճ կամ ամենաերկար ուղու որոշումը՝ կախված խնդրի պահանջից:

Դժ օպտիմացման սկզբունքները.

1. Յուրաքանչյուր վիճակի համար գոյություն ունի սկզբնականից այդ վիճակին հանգեցնող լավագույն վարք:
 2. Լավագույն վարքն օժտված է այն հատկությամբ, որ ինչպիսին էլ լինի s վիճակը, հաջորդ որոշումները պետք է լինեն լավագույն վարք s -ի համար:
 3. Լավագույն ուղու ցանկացած ենթուղի լավագույնն է:
- Բելմանի անդրադարձ հավասարումների ընդհանուր տեսքը** կատարենք հետևյալ նշանակումները.

S_n - n -րդ փուլին պատկանող բոլոր վիճակների (գազաթների) բազմություն,

d_n - n -րդ փուլում ընտրված վարվելակերպ (աղեղ),

$B_n(s)$ - թույլատրելի վարվելակերպերի բազմությունը s վիճակի համար,

$r_n = r_n(s_n, d_n)$ - «եկամտի» ֆունկցիան, որը ստացվում է S_n վիճակում d_n որոշում կայացնելիս:

Նպատակային ֆունկցիայի արժեքը հավասար է առաջինից մինչև վերջին փուլն ընկած ամեն մի փուլում «եկամտի» ֆունկցիաների գումարին:

Բելմանի անդրադարձ հավասարումը կլինի.

$$f_n(s_n) = \min_{d_n \in B_n(s)} \{ r_n(s_n, d_n) + f_{n-1}(s_{n-1}) \}, \quad n = \overline{1, k},$$

որտեղ՝ $f_0 = 0$, և հաշվարկը կատարվում է $f_1, f_2, \dots, f_k$ հաջորդականությամբ:

Որոշ խնդիրներ քննարկելով՝ նկարագրենք դրանց լուծման եղանակները դիմամիկ ծրագրավորման միջոցով:

6.1. ՈՒՍԱԴՊԱՐԿԻ ԽՆԴԻՐԸ

Ենթադրենք՝ ուսապարկում անհրաժեշտ է տեղադրել n տեսակի իրեր, որոնք չեն կարող տրոհվել մասերի: Հայտնի է յուրաքանչյուր իրի կշիռը (ծավալը)՝ a_i , $i = \overline{1, n}$, ուսապարկի տարողությունը՝ V : Տրված է նաև i -րդ տեսակի իրի օգտակարության ֆունկցիան՝ կախված իրի քանակից՝ $f_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$:

Օրինակ՝ $f_1(3) = 5$ նշանակում է, որ առաջին տեսակի իրի երեք հատի օգտակարությունը 5 է: Պարզ է, որ $f_1(0) = 0$: Պահանջվում է որոշել, թե որ իրից որքան տեղավորել ուսապարկում, որ ամբողջ պարունակության օգտակարությունը լինի առավելագույնը, իսկ կշիռը չգերազանցի ուսապարկի տարողությունը: Եթե x_i -ով նշանակենք i -րդ իրի որոնելի քանակը, ապա խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը կլինի.

$$F(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq V$$

$$x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, n}$$

$$x_i, \quad i = \overline{1, n} \quad \text{ամբողջաթիվ են:}$$

Սա ոչ գծային ամբողջաթիվ ծրագրավորման խնդիր է: Նշանակենք $L_k(\xi)$ -ով առավելագույն օգտակարությունը, երբ իրերն ընտրում ենք առաջին k տեսակից, իսկ տարողությունը ξ է: Փաստորեն, լուծել խնդիրը՝ նշանակում է գտնել $L_n(V)$ -ն:

$$\begin{aligned} L_k(\xi) &= \max_{x_1 x_2 \dots x_k} \sum_{i=1}^k f_i(x_i) = \max_{x_1 x_2 \dots x_k} \left\{ f_k(x_k) + \sum_{i=1}^{k-1} f_i(x_i) \right\} = \\ &= \max_{x_k} \left\{ f_k(x_k) + \max_{x_1 x_2 \dots x_{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} f_i(x_i) \right\} = \max_{0 \leq x_k \leq \lfloor \xi / a_k \rfloor} \{ f_k(x_k) + L_{k-1}(\xi - a_k x_k) \}, \quad (6.1) \end{aligned}$$

$$L_1(\xi) = \max_{0 \leq x_1 \leq \lfloor \xi / a_1 \rfloor} f_1(x_1): \quad (6.2)$$

(6.1) և (6.2) միասին կոչվում են Բելմանի անդրադարձ բանաձևեր:

6.2. ԲԱՆՎՈՐԱԿԱՆ ՈՒԺԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Դիտարկենք n ժամանակահատված: Հայտնի է ամեն մի ժամանակահատվածի համար անհրաժեշտ աշխատուժը՝ m_j , $j = \overline{1, n}$, ինչպես նաև բանվորների սկզբնական՝ m_0 թիվը: Նշանակենք x_j -ով j -րդ ժամանակահատվածում աշխատանքի ձևակերպված բանվորների թիվը: Տրված են բանվորների թվի փոփոխության համար անհրաժեշտ ծախսերի ֆունկցիաները՝ $f_j(x_j - x_{j-1})$, $j = \overline{1, n}$, մասնավորապես՝ եթե $x_j - x_{j-1} > 0$, ապա $f_j(x_j - x_{j-1})$, $j = \overline{1, n}$ -ը աշխատանքի ընդունման, իսկ հակառակ դեպքում՝ աշխատանքից ազատման ծախսերն են: Նշանակենք $g_j(m_j - x_j)$ -ով ($j = \overline{1, n}$) պահանջվող աշխատուժ ճշգրտորեն չունենալու պատճառով առաջացող ծախսերի ֆունկցիան՝ կախված բանվորների անհրաժեշտ թվի ավելցուկից կամ պակասից: Մասնավորապես՝ եթե $m_j - x_j < 0$, ապա g_j ֆունկցիան հավելյալ աշխատուժ պահելու ծախսն է, հակառակ դեպքում՝ անհրաժեշտ աշխատուժից պակաս աշխատուժ ունենալու պատճառով առաջացող կորուստը:

Պահանջվում է որոշել յուրաքանչյուր ժամանակահատվածում աշխատանքի ձևակերպված բանվորների թիվն այնպես, որ բոլոր զումարային ծախսերը լինեն նվազագույնը: Այդ դեպքում խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$F = \sum_{j=1}^n \{f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(m_j - x_j)\} \rightarrow \min,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}:$$

x_j -երը ամբողջ են, $L_k(\xi)$ -ով նշանակենք կառավարման նվազագույն ծախսերը՝ k -րդ ժամանակահատվածից մինչև n -րդ ժամանակահատվածը ներառյալ, երբ k -րդի սկզբում բանվորների թիվը ξ է.

$$L_k(\xi) = \min_{x_1 x_2 \dots x_n} \left\{ \sum_{j=k}^n (f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(m_j - x_j)) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \min_{x_k, x_{k+1}, \dots, x_n} \left\{ f_k(x_k - \xi) + g_k(m_k - \xi) + \sum_{j=k+1}^n (f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(m_j - x_j)) \right\} = \\
&= \min_{x_k} \left\{ f_k(x_k - \xi) + g_k(m_k - \xi) + \min_{x_{k+1}, \dots, x_n} \sum_{j=k+1}^n (f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(m_j - x_j)) \right\} = \\
&= \min_{x_k} \{ f_k(x_k - \xi) + g_k(m_k - \xi) + L_{k+1}(x_k) \}:
\end{aligned}$$

Ակնհայտ է, որ $L_1(m_0)$ -ն ամբողջ ժամանակահատվածի նվազագույն ընդհանուր ծախսն է, որը կարելի է որոշել հակառակ ուղղությամբ՝ վերոհիշյալ անդրադարձ բանաձևերով:

Խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է որոշել $L_n(\xi)$ -ը.

$$L_n(\xi) = \min_{0 \leq x_j \leq \max m_j} \{ f_n(x_n - \xi) + g_n(m_n - x_n) \}:$$

6.3. ԿԱՐՃԱԳՈՒՅՆ ՈՒՂՈՒ ԽՆԴԻՐԸ

Ձեռնարկության արտադրանքը «Ա» արտադրման վայրից պետք է տեղափոխել «Բ» սպառման վայրն այնպես, որ անցած ճանապարհը լինի նվազագույնը: Հայտնի են «Ա» արտադրման վայրից «Բ» սպառման վայր տանող բոլոր ուղիները, որոնք անցնում են մի շարք բնակավայրերով, և դրանց միջև եղած հեռավորությունները:

Կարճագույն ուղու խնդիրը դիտարկենք մասնակի օրինակի համար, որը ներկայացված է ստորև բերված աղյուսակ 6.1-ում:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

i, j ՝ բնակավայրերի ինդեքս, $i, j = 1, 2, \dots, 11$ և $i < j$, որտեղ 1՝ արտադրման «Ա» վայր, 11՝ սպառման «Բ» վայր,

(i, j) ՝ i և j բնակավայրերը միացնող աղեղներ,

l_{ij} ՝ i և j բնակավայրերի միջև հեռավորություն:

Աղյուսակ 6.1

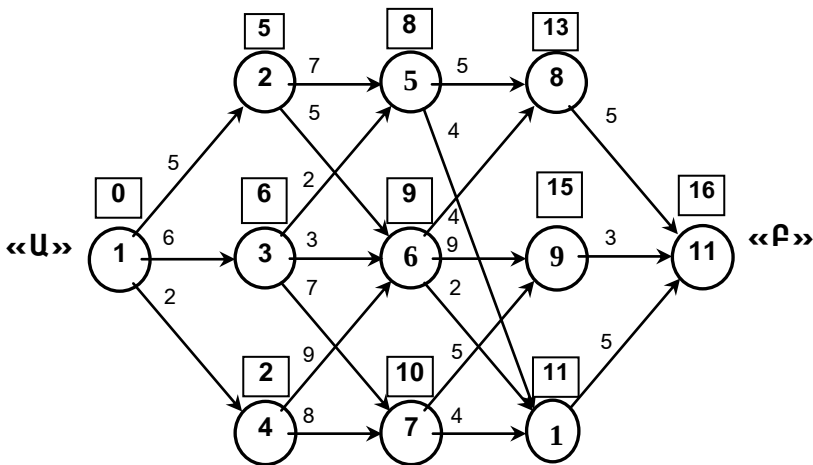
(i, j)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(2,6)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(4,6)	(4,7)
l_{ij}	5	6	2	7	5	2	3	7	9	8

(i, j)	(5,8)	(5,10)	(6,8)	(6,9)	(6,10)	(7,9)	(7,10)	(8,11)	(9,11)	(10,11)
l_{ij}	5	4	4	9	2	5	4	5	3	5

Կարճագույն ուղու խնդրի լուծման համար կառուցենք դրա պայմաններին համապատասխան ցանցը (աղյուսակ 6.1-ում բերված տվյալներով) և գտնենք վերջինիս ամենակարճ ուղին՝ լավագույն լուծումը:

Նշենք «Ա»-ից «Բ» տանող բոլոր հնարավոր բնակավայրերն ու ուղիները, որի արդյունքում կստանաք գծապատկեր 6.2-ում պատկերված ցանցը, որտեղ համարակալված գագաթները բնակավայրերն են, իսկ աղեղները՝ դրանք միացնող ուղիները: (i, j) աղեղներին վերագրենք l_{ij} մեծությունները, այսինքն՝ համապատասխան i և j բնակավայրերի միջև եղած հեռավորությունները, որոնք գրված են աղեղների վրա:

Օրինակ՝ «Ա»-ից մինչև 2-րդ բնակավայր 5 կմ է, մինչև 3-րդ բնակավայր՝ 6 կմ, մինչև 4-րդ բնակավայր՝ 2 կմ, 3-րդ բնակավայրից մինչև 6-րդ բնակավայր՝ 3 կմ և այլն: Նկատենք, որ «Ա»-ից «Բ» տանող բազմաթիվ ուղիներ կան, և եթե դիտարկենք բոլոր հնարավորները և ընտրենք դրանցից կարճագույնը, կգտնենք լավագույնը: Բայց եթե բնակավայրերի և ուղիների քանակները շատ են, այսինքն՝ շատ է գագաթների և աղեղների քանակը, ապա նշված եղանակով կարճագույն ուղին գտնելը բավական դժվար է: Կարճագույն ուղու խնդրի լուծման ԴՅ մեթոդով, որը հնարավորություն է տալիս խուսափելու բարդություններից:



Գծապատկեր 6.2

Պարզ է, որ «Ա» արտադրման վայրից՝ (1) գազաթից կարող ենք գնալ երեք ուղղությամբ՝ դեպի 2-րդ, 3-րդ կամ 4-րդ բնակավայրերից որևէ մեկը: Դա կարող ենք անվանել ամենակարճ ուղու ընտրության սկզբնական փուլ: Հաջորդ փուլում, կախված այն բանից, թե որ բնակավայրում ենք եղել սկզբնական, այսինքն՝ նախորդ փուլի ընտրության արդյունքում, կարող ենք շարժվել դեպի որևէ հարևան բնակավայր: Օրինակ՝ եթե ընտրել էինք 2-րդ բնակավայրը, ապա կարող ենք շարժվել դեպի 5-րդ կամ 6-րդ, իսկ եթե ընտրել էինք 3-րդը՝ դեպի 5-րդ, 6-րդ և 7-րդ բնակավայրեր և այլն: Երբ որոշակի բնակավայրում ենք, ապա համարում ենք, որ վերջինիս համարին համապատասխանող վիճակում ենք: Գտնվելով որոշակի վիճակում՝ որոշում ենք, թե դեպի որ բնակավայրը գնալ: «Ա»-ից «Բ» ամենակարճ ուղին ընտրելու համար, գտնվելով որևէ i -րդ բնակավայրում, պետք է շարժվենք դեպի «Բ»՝ նույնպես ընտրելով ամենակարճ ուղին:

ԴԾ օպտիմալացման առաջին սկզբունքը. լավագույն ուղու ցանկացած **ենթուղի** լավագույնն է:

Խնդրի լուծմանը կհանգենք՝ փուլ առ փուլ դիտարկելով որոշակի գազաթներ (վիճակներ) և տրված վիճակին համապատասխան որոշում կայացնելով (լուծումը գտնելով):

Դիտարկենք ամեն մի փուլին պատկանող բոլոր գազաթները և դրանցից յուրաքանչյուրի համար որոշենք «Ա»-ից այդ գազաթը տանող ամենակարճ ուղու երկարությունը:

f_j -ով նշանակենք սկզբնական գազաթից j -րդ գազաթն ընկած ամենակարճ ուղու երկարությունը՝ $j = \overline{1, n}$, որտեղ n -ը գազաթների քանակն է ցանցում, և քանի որ (0) գազաթը ելակետային է ցանցում, ապա $f_1 = 0$: Նկատենք, որ զծապատկեր 6.1-ում պատկերված ցանցը պարբերաշրջան չի պարունակում:

f_j -ն՝ կարճագույն ուղու մեծությունը, հավասար է մինչև i -րդ գազաթն ընկած կարճագույն ուղու երկարությանը գումարած i -րդից

j -րդ գազաթների միջև եղած հեռավորության մեծության փոքրագույն արժեքը՝ ըստ բոլոր (i, j) թույլատրելի աղեղների՝ $i \in B(j)$:

Անդրադարձ բանաձևը կլինի.

$$f_j = \min_{i \in B(j)} \{f_i + l_{ij}\} :$$

Այսինքն՝ j -րդ գագաթի f_j կարճագույն ուղին կարելի է որոշել, եթե հայտնի է մինչ այդ եղած i -րդ գագաթի կարճագույն ուղին, որն ունի ուղի դեպի j -րդ գագաթ:

Կատարենք հաշվարկներ.

Փուլ 1. $f_1 = 0$:

Փուլ 2. $f_2 = f_1 + l_{12} = 0 + 5 = 5$,
 $f_3 = f_1 + l_{13} = 0 + 6 = 6$,
 $f_4 = f_1 + l_{14} = 0 + 2 = 2$:

Ստացված բոլոր վերջնական արդյունքները՝ f_j -երը, գրենք գագաթների շրջանակների վերին մասում:

Փուլ 3. $f_5 = \min\{f_2 + l_{25}; f_3 + l_{35}\} = \min\{5 + 7; 6 + 2\} = 8$,
 $f_6 = \min\{f_2 + l_{26}; f_3 + l_{36}; f_4 + l_{46}\} = \min\{5 + 5; 6 + 3; 2 + 9\} = 9$,
 $f_7 = \min\{f_3 + l_{37}; f_4 + l_{47}\} = \min\{6 + 7; 2 + 8\} = 10$:

Փուլ 4. $f_8 = \min\{f_5 + l_{58}; f_6 + l_{68}\} = \min\{8 + 5; 9 + 4\} = 13$ (2 հատ),
 $f_9 = \min\{f_6 + l_{69}; f_7 + l_{79}\} = \min\{9 + 9; 10 + 5\} = 15$,
 $f_{10} = \min\{f_5 + l_{5,10}; f_6 + l_{6,10}; f_7 + l_{7,10}\} = \min\{8 + 4; 9 + 2; 10 + 4\} = 11$:

Փուլ 5. $f_{11} = \min\{f_8 + l_{8,11}; f_9 + l_{9,11}; f_{10} + l_{10,11}\} = \min\{13 + 5; 15 + 3; 11 + 5\} = 16$:

Այսպիսով՝ կարճագույն ուղու երկարությունը 16 կմ է: Այժմ որոշենք այն երթուղին, որն ամենակարճն է և գտնենք դրա գագաթները: Դրա համար վարվում ենք հետևյալ կերպ. 16 թվից հանում ենք կից գագաթը միացնող աղեղի երկարությունը՝ տարբերությունը համեմատելով շրջանակի մոտ գրված թվի հետ: Եթե այդ երկու թվերը համընկնում են, ապա տվյալ գագաթն ամենակարճ ուղին է: Այդպես շարժվելով հակառակ ուղղությամբ՝ կհասնենք սկզբնական գագաթին և կգտնենք փնտրվող լավագույն ուղին: Դիտարկված խնդրի համար լավագույն ուղին հետևյալն է՝ $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 11$, իսկ լավագույն արժեքը՝ 16:

Այսպիսով՝ սկզբնական՝ «Ա» արտադրման վայրից «Բ» սպառման վայր տանող ամենակարճ ուղին գտնելու համար լուծեցինք նմանատիպ խնդիրներ բոլոր վիճակների համար, և ստացվեց սկզբնական խնդրի լուծումը²:

² Զնարավոր է, որ կարճագույն ուղին միակը չլինի, այսինքն՝ խնդիրն ունենա այլ-ընտրանքային լուծումներ:

6.4. ՁԵՌՆԱՐԿՈՒԹՅԱՆ ՆԵՐԴՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Տնօրենների խորհուրդն ուսումնասիրում է ձեռնարկության երեք մասնաճյուղերի արտադրական հզորությունների ավելացման հարցը, որի համար պատրաստ է ներդնել 5 մլն պ.դ.մ.: Յուրաքանչյուր մասնաճյուղ ներկայացնում է արտադրական հզորացման նախագծերի տարբերակներ, որոնք բնութագրվում են C ծախսով և R եկամտով: Համապատասխան տվյալները ներկայացված են աղյուսակ 6.2-ում, որտեղ դիտարկված են մասնաճյուղի ծախսի գումարով նախագծեր, որոնք հնարավորություն են տալիս ներդրման գործընթացում չընդգրկելու մասնաճյուղերից որևէ մեկը: Ձեռնարկության տնօրենների խորհրդի նպատակն է 5 մլն պ.դ.մ. **ներդնել բոլոր մասնաճյուղերում այնպես, որ սպասվող եկամուտը լինի առավելագույնը:**

Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

i ՝ մասնաճյուղերի ինդեքս, $i = 1, 2, 3$,

C_i ՝ i -րդ մասնաճյուղի ծախս, $i = 1, 2, 3$,

R_i ՝ i -րդ մասնաճյուղի եկամուտ, $i = 1, 2, 3$,

K ՝ ներդրումային նախագծերի տարբերակներ,

X_i ՝ i -րդ փուլում կատարված ներդրումների չափ, $i = 1, 2, 3$:

Եթե որևէ ներդրումային գումարի համար մասնաճյուղը չի ներկայացրել նախագիծ, ապա աղյուսակ 6.2-ում կա'ն ոչինչ չի նշվում, կամ էլ նշվում է զրո:

Աղյուսակ 6.2

Նախագծերի տարբերակներ	1-ին մասնաճյուղ		2-րդ մասնաճյուղ		3-րդ մասնաճյուղ	
K	C_1	R_1	C_2	R_2	C_3	R_3
1-ին	0	0	0	0	0	0
2-րդ	1	2	2	3	1	2
3-րդ	3	5	3	5	3	6
4-րդ	4	7	4	6	-	-

1-ին և 2-րդ մասնաճյուղերի նախագծերը չորսն են, իսկ 3-ինը՝ երեքը:

Ձեռնարկության ներդրումների բաշխման խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը կլինի.

$$R(R_1, R_2, R_3) = R_1 + R_2 + R_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 5 \\ C_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad i = 1, 2, 3: \end{cases}$$

խնդիրը կարելի է ուղղակիորեն լուծել, քննարկելով բոլոր հնարավոր նախագծերը, բայց հնարավոր է՝ դրանցից ոչ բոլորը բավարարեն ներդրումների բաշխման պահանջները: Օրինակ՝ եթե ընտրենք 4-րդ, 3-րդ և 2-րդ նախագծերը՝ համապատասխանաբար 1-ին, 2-րդ և 3-րդ մասնաճյուղերի համար, ապա ներդրման գումարը հավասար կլինի 8 մլն պ.դ.մ., որը մեծ է 5 մլն պ.դ.մ.-ից, իսկ եթե ընտրենք 2-րդ, 3-րդ և 1-ին նախագծերը, ապա ներդրման գումարը 4 մլն պ.դ.մ. է, որը փոքր է 5 մլն պ.դ.մ.-ից: Փաստացի ներդրումների բաշխման խնդիրը հնարավոր է լուծել բոլոր հնարավոր տարբերակների դիտարկման եղանակով, բայց պետք է կատարել մեծ թվով հաշվարկներ: Միաժամանակ, ոչ բոլոր տարբերակներն են թույլատրելի. եթե մասնաճյուղերի քանակը 3 չէ, այլ Թ, ապա հաշվարկների քանակն ավելանում է:

Ձեռնարկության՝ ներդրումների բաշխման խնդրի լուծումը ԴԾ մեթոդով հնարավորություն է տալիս խուսափելու բարդություններից: Կառուցենք խնդրի պայմաններին համապատասխան ցանց (աղյուսակ 6.2-ում բերված տվյալներով) և գտնենք դրա ամենաերկար ուղին, ինչը համարժեք է խնդրի լավագույն լուծումը, այն է՝ առավելագույն եկամուտը գտնելուն:

Ինչպես նշեցինք, առաջին տողի 0 գումարով ծախսերի դիտարկումը թույլ է տալիս որևէ մասնաճյուղ չընդգրկել ներդրումային ծրագրում, միաժամանակ, նշանակում է, որ մասնաճյուղերում վերականգնվում նախատեսված չէ:

Նախ՝ ներդրումների բաշխման խնդիրը ներկայացնենք որպես որոշումների կայացման բազմափուլ գործընթաց: Ցանցի կառուցման համար ներդրումների բաշխման խնդիրը բաժանենք մտացածին **փուլերի**:

Առաջին փուլում դիտարկենք միայն մեկ մասնաճյուղ, օրինակ՝ 1-ինը, երկրորդ փուլում՝ երկու մասնաճյուղ, օրինակ՝ 1-ինը և 2-րդը միասին, հաջորդ փուլում (մեր օրինակում՝ վերջին)՝ 1-ին, 2-րդ և 3-րդ մասնաճյուղերը միասին: Հարմարության համար ներմուծենք 0-ական փուլը:

Աղեղի երկարություններին վերագրենք թույլատրելի նախագծերի իրականացումից սպասվող եկամուտների՝ R_i , $i = 1, 2, 3$ մեծությունները:

Ըստ կատարված նշանակումների՝ x_1 -ն առաջին, x_2 -ը՝ առաջին և երկրորդ փուլերի ներդրման գումարն է, իսկ x_3 -ը՝ բոլոր մաս-

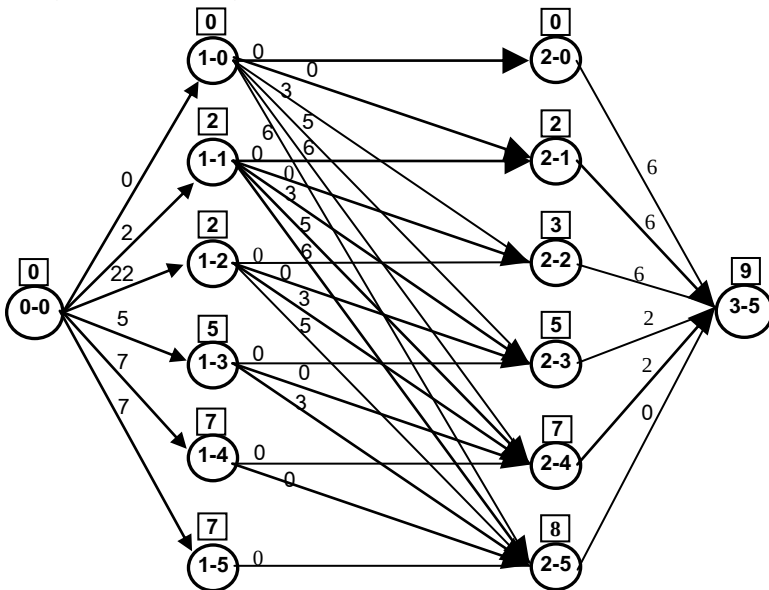
նաճյուղերին հատկացվածը, այսինքն՝ 1-ինին, 2-րդին և 3-րդին տրամադրված ամբողջական ներդրումը, ուստի և՛ $x_3 = 5$:

Նշենք, որ x_1, x_2, x_3 -ը ամբողջ թվեր են, և $x_i - \varrho, i = 1, 2, 3 - \mathcal{O}$ ընդունում են $0, 1, \dots, 5$ արժեքներ: Ներդրումների բաշխման խնդրի ցանցը բերված է ստորև՝ գծապատկեր 6.3-ում:

$x_i, i = 1, 2, 3$ -ի դեպքում ամեն մի արժեքին համապատասխանում է ցանցի որոշակի գագաթ, և ցանցի գագաթները միացնող աղեղների երկարությունները որոշվում են երկու գագաթը միացնող՝ լավագույն թույլատրելի ներդրումների նախագծից ստացված եկամտի թվային արժեքով: 0-ական փուլում վերցնում ենք (0-0) գագաթը 0 ներդրումով:

Առաջին փուլի՝ $x_1 = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$ -ի ամեն մի արժեքին համապատասխանում են ցանցի (1-0), (1-1), ..., (1-5) գագաթները: Երկրորդ փուլում՝ $x_2 = (1, 2, 3, 4, 5)$ -ի դեպքում, համապատասխանում են (2-0), (2-1), ..., (2-5) գագաթները: Եվ, վերջապես, երրորդ փուլում՝ $x_3 = 5$ արժեքին համապատասխանում է (3-5) գագաթը:

Դիտարկենք 0-ական փուլում 0 գագաթն առաջին փուլի՝ $x_1 = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$ գագաթներին միացնող աղեղները.



Գծապատկեր 6.3

(0-0, 1-0) աղեղը՝ 0-ական փուլի (0-0) և առաջին փուլի (1-0) գագաթները, համապատասխանում են մի իրավիճակի, երբ առաջին փուլում 1-ին մասնաճյուղում ներդրում չի կատարվել: Աղյուսակում դա 1-ին մասնաճյուղի նախագծերի տարբերակներից 1-ինն է, և $R_1 = 0$ ՝ եկամուտը 0-ական է: (0-0, 1-0) աղեղին վերագրում ենք 0 արժեք:

(0-0, 1-1) աղեղը՝ 0-ական փուլի (0-0) և առաջին փուլի (1-1) գագաթները, համապատասխանում է մի իրավիճակի, երբ առաջին փուլում 1-ին մասնաճյուղում կատարվել է 1 մլն պ.դ.մ. ներդրում, որը տվյալ մասնաճյուղի 2-րդ նախագիծն է, որտեղ նշված է, որ 1 մլն պ.դ.մ. ներդրման դեպքում կապահովվի 2 մլն պ.դ.մ. եկամուտ. $R_1 = 2$, հետևաբար՝ (0-0, 1-1) աղեղին վերագրում ենք 2 արժեք:

(0-0, 1-2) աղեղին համապատասխանում է մի իրավիճակ, երբ մասնաճյուղ 1-ինում կարող է ներդրվել 2 մլն պ.դ.մ.: Բայց վերջինս նման նախագծային տարբերակ չի ներկայացրել, և (0-0, 1-2) աղեղին վերագրում ենք նախորդ նախագծի տարբերակի եկամտի արժեքը՝ 2:

(0-0, 1-3) աղեղին համապատասխանում է 1-ին մասնաճյուղի 3-րդ նախագիծը, և աղեղին վերագրում ենք 5 արժեքը:

(0-0, 1-4) և (0-0, 1-5) աղեղներին վերագրում ենք 7, քանի որ 5 մլն պ.դ.մ. ներդրման ծրագիր մասնաճյուղը չի ներկայացրել և լավագույն դեպքում կարող է ստանալ 4-րդ տարբերակի եկամուտը:

Դիտարկենք առաջին փուլի գագաթները երկրորդ փուլի գագաթներին միացնող աղեղները: x_2 -ը 2-րդ փուլում բաշխվող ներդրման գումարն է, պայմանով, որ առաջին փուլում հատկացվել է x_1 գումար և, հետևաբար՝ $x_2 - x_1 \geq 0$ միայն 2-րդ մասնաճյուղի հնարավոր ներդրման գումարն է: Այդ անհավասարությունը թելադրում է ցանցի կառուցվածքը: (x_1, x_2) աղեղը թույլատրելի է միայն այն նախագծերի համար, որոնց իրականացման ծախսը չի գերազանցում $(x_2 - x_1)$ -ը: Այդ աղեղի երկարությունը նախագծերի R_2 -ի առավելագույն արժեքն է: Այսպես, օրինակ, եթե $x_1 = 1$ և $x_2 = 4$, ապա 2-րդ փուլում բաշխված ներդրումը կկազմի՝ $C_2 = x_2 - x_1 = 4 - 1 = 3$, ուստի և թույլատրելի են առաջին 3 նախագծերը: Քանի որ 3-րդ նախագծին համապատասխանում է $R_2 = 5$ մլն պ.դ.մ. եկամուտ, ապա (1-1, 2-4) աղեղին կվերագրենք 5 արժեքը:

Առաջին փուլում, եթե $x_1 = 0$, իսկ.

$x_2 = 0$, ապա $x_2 - x_1 = 0 = C_2 \Rightarrow R_2 = 0$, և (1-0, 2-0) աղեղին կվերագրենք 0 արժեքը,

$x_2 = 1$, ապա $x_2 - x_1 = 1$, քանի որ 1 մլն պ.դ.մ.-ի համար աղ-յուսակում առկա չեն տվյալներ, այսինքն՝ եթե որպես նախագծային տարբերակ չի ներկայացվել, ապա (1-0, 2-1) աղեղին կվերագրենք նախորդ արժեքը՝ 0,

$x_2 = 2$, ապա $x_2 - x_1 = 2 \Rightarrow R_2 = 3$, և (1-0, 2-2) աղեղին կվե-րագրենք 3 արժեքը,

$x_2 = 3$, ապա $x_2 - x_1 = 3 \Rightarrow R_2 = 5$, և (1-0, 2-3) աղեղին կվե-րագրենք 5 արժեքը,

$x_2 = 4$, ապա $x_2 - x_1 = 4 \Rightarrow R_2 = 6$, և (1-0, 2-4) աղեղին կվե-րագրենք 6 արժեքը, իսկ (1-0, 2-5) աղեղին՝ (1-0, 2-4) աղեղի արժեքը՝ 6:

Եթե $x_2 - x_1 < 0$, ապա նման իրավիճակ չի կարող լինել, քանի որ երկրորդ փուլում 1-ին և 2-րդ մասնաճյուղերում ներդրվող ընդ-հանուր գումարը չի կարող փոքր լինել միայն 1-ին մասնաճյուղում ներդրվող գումարից, վատագույն դեպքում x_2 -ը կարող է հավա-սար լինել x_1 -ին: Այսինքն՝ (1-1, 2-0), (1-2, 2-0), (1-2, 2-1) և նմանա-տիպ այլ աղեղներ, երբ $x_1 > x_2$, գոյություն չունեն:

Դժվար չէ նկատել, որ յուրաքանչյուր աղեղ կապված է որևէ նախագծի հետ: Մեր նպատակը 0-ական փուլի (0-0) գազաթից եր-րորդ փուլի (3-5) գազաթ տանող ամենաերկար ուղին որոշելն է, որի երկարությունն առավելագույն եկամուտն է: x_1, x_2, x_3 փոփո-խականների սահմանումից հետևում է, որ 0-ական փուլի (0-0) գա-զաթը երրորդ փուլի (3-5) գազաթին միացնող կամայական ուղին համապատասխանում է նախագծերի թույլատրելի համակցությա-նը: Դժվար չէ նկատել նաև, որ որոշ աղեղներ չեն ազդում լավա-գույն լուծումը գտնելու վրա, ուստի և դրանք կարելի է չդիտարկել: Այդպիսի աղեղների անտեսումը զգալիորեն նվազեցնում է անհրա-ժեշտ հաշվարկների ծավալը:

Ցանցը կառուցելուց հետո գտնենք 0-ական փուլի (0-0) գազա-թից մինչև 3-րդ փուլի (3-5) գազաթը տանող ամենաերկար ուղին:

$f_i(x_i)$ -ով ($i = 1, 2, 3$) նշանակենք i -րդ փուլում x_i ($i = 1, 2, 3$) գազաթ տանող ամենաերկար ուղու երկարությունը: Քանի որ 0-ական փուլը ելակետային է, ապա $f_0(0) = 0$: Հետագա հաշ-վարկները կատարենք ըստ փուլերի:

Փուլ 1: Քանի որ 0-ական փուլի (0-0) գազաթը առաջին փուլի գազաթների հետ միացվում է մեկական աղեղով, ապա.

$f_1(x_1) = f_0(0) + R_1(0, x_1)$, որտեղ $R_1(0, x_1)$ -ը $(0-0, 1-x_1)$ աղեղի երկարությունն է (եկամուտը):

Կստանանք.

$$f_1(0) = 0 + 0 = 0, \quad f_1(1) = 0 + 2 = 2, \quad f_1(2) = 0 + 2 = 2,$$

$$f_1(3) = 0 + 5 = 5, \quad f_1(4) = 0 + 7 = 7, \quad f_1(5) = 0 + 7 = 7:$$

Բոլոր վերջնական արդյունքները՝ $f_i(x_i)$ -երը, գրենք գազաթների շրջանակների վերին մասում:

Փուլ 2: Այս փուլում հաշվարկում ենք մինչև $x_2 = (0, 1, 2, 3, 4, 5)$ ՝ դեպի բոլոր գազաթներ տանող ամենաերկար ուղիները:

Նկատենք, որ մինչև x_2 գազաթ տանող ամենաերկար ուղու մեծությունը հավասար է մինչև x_1 գազաթ տանող ամենաերկար ուղու մեծությանը գումարած (x_1, x_2) աղեղի երկարությունների առավելագույն արժեքը՝ ըստ բոլոր (x_1, x_2) թույլատրելի աղեղների (թ.ա.): Ասվածը կարելի է արտահայտել անդրադարձ հավասարմամբ.

$$f_2(x_2) = \max_{\theta, \omega(x_1, x_2)} \{f_1(x_1) + R_2(x_1, x_2)\}$$

Արդյունքում կունենանք.

$$f_2(0) = \max\{0 + 0\} = 0,$$

$$f_2(1) = \max\{0 + 0, 2 + 0\} = 2,$$

$$f_2(2) = \max\{0 + 3, 2 + 0, 2 + 0\} = 3,$$

$$f_2(3) = \max\{0 + 5, 2 + 3, 2 + 0, 5 + 0\} = 5 \quad (3 \text{ հատ}),$$

$$f_2(4) = \max\{0 + 6, 2 + 5, 2 + 3, 5 + 0, 7 + 0\} = 7 \quad (2 \text{ հատ}),$$

$$f_2(5) = \max\{0 + 6, 2 + 6, 2 + 5, 5 + 3, 7 + 0, 7 + 0\} = 8 \quad (2 \text{ հատ}):$$

Ստացված թվերը մինչև համապատասխան գազաթ տանող ամենաերկար ուղու երկարությունն են, և դրանք օգտագործվում են հաջորդ փուլի հաշվարկների համար:

Փուլ 3: $x_2 = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ՝ բոլոր գազաթներից $x_3 = (5)$ գազաթ տանող ամենաերկար ուղին որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$f_3(x_3) = \max_{\theta, \omega(x_2, x_3)} \{f_2(x_2) + R_3(x_2, x_3)\}:$$

Հաշվարկի արդյունքում ստանում ենք.

$$f_3(5) = \max\{0+6, 2+6, 3+6, 5+2, 7+2, 8+0\} = 9 \quad (2 \text{ հատ}):$$

Լավագույն ուղին, այսինքն՝ Լավագույն ներդրումային տարբերակները երեքն են, որոնց բոլորի դեպքում էլ սպասվելիք առավելագույն եկամուտը 9 մլն պ.դ.մ. է:

Լավագույն ուղին գտնելու համար վերջին գազաթից շարժվում ենք հետ՝ դեպի սկզբնական գազաթը: Ամենաերկար ճանապարհի՝ Լավագույն ուղու գազաթները որոշելու համար վարվում ենք հետևյալ կերպ. գտած 9 թվից հանում ենք կից գազաթը միացնող աղեղի երկարությունը և տարբերությունը համեմատում շրջանակի վերևում գրված թվի հետ: Եթե այդ երկու թվերը համընկնում են, ապա տվյալ գազաթն արտացոլում է ամենաերկար ուղին: Շարժվելով հակառակ ուղղությամբ՝ հասնում ենք սկզբնական գազաթին և ստանում փնտրվող Լավագույն ուղիները: Ուսումնասիրվող խնդիրն ունի երեք Լավագույն լուծումներ:

Ներկայացնենք Լավագույն ներդրումն ըստ ներդրումային նախագծերի տարբերակների, Լավագույն եկամուտն ըստ մասնաճյուղերի և Լավագույն ուղիները:

<i>Լավագույն եկամուտ</i>	<i>Լավագույն ներդրումն ըստ մասնաճյուղերի</i>	<i>Լավագույն եկամուտն ըստ մասնաճյուղերի</i>	<i>Լավագույն նախագծերի տարբերակներ</i>	<i>Լավագույն ուղի</i>
$R^* = 9$	$C_1^* = 0, C_2^* = 2, C_3^* = 3$	$R_1^* = 0, R_2^* = 3, R_3^* = 6$	(1, 2, 3)	(0-0, 1-0, 2-2, 3-5)
	$C_1^* = 1, C_2^* = 3, C_3^* = 1$	$R_1^* = 2, R_2^* = 5, R_3^* = 2$	(2, 4, 2)	(0-0, 1-1, 2-4, 3-5)
	$C_1^* = 4, C_2^* = 0, C_3^* = 1$	$R_1^* = 7, R_2^* = 0, R_3^* = 2$	(4, 1, 2)	(0-0, 1-4, 2-4, 3-5)

Ներդրումների բաշխման խնդիրը կարելի է լուծել նաև այն պարագայում, երբ ներդրվող գումարը 5 մլն պ.դ.մ. չէ և ամբողջ թիվ չէ:

Եթե ներդրվող գումարը փոքր է 5 մլն պ.դ.մ.-ից, օրինակ՝ 4 մլն է, ապա խնդրի լուծման համար չեն դիտարկվում առաջին փուլում՝ (1-5), երկրորդում՝ (2-5) գազաթները, և երրորդ փուլի գազաթը կլինի (3-4)-ը:

Եթե ներդրվող գումարը 6 մլն պ.դ.մ. է, ապա խնդրի լուծման համար ավելացվում են առաջին փուլում՝ (1-6), երկրորդում՝ (2-6) գազաթները, և երրորդ փուլի գազաթը լինում է (3-6)-ը:

Եթե ներդրումների բաշխման խնդրում 3-րդ մասնաճյուղը չի մասնակցում ներդրումային ծրագրին կամ տնօրենների խորհուրդը որոշում է որոշակի ժամանակով հետաձգել վերջինիս ներդրումային նախագիծը, ապա դրա պատասխանը կարելի է գտնել՝ օգտվելով

արդեն լուծված խնդրից: Այդ նպատակով դիտարկենք միայն առաջին և երկրորդ փուլերի արդյունքները: Լավագույն լուծումը ներկայացված է ստորև³:

Լավագույն եկամուտ	Լավագույն ներդրումն ըստ մասնաճյուղերի	Լավագույն եկամուտն ըստ մասնաճյուղերի	Լավագույն նախագծերի տարբերակներ	Լավագույն ուղի
$R^* = 8$	$C_1^* = 1, C_2^* = 4$	$R_1^* = 2, R_2^* = 6$	$(2,4)$	$(0-0,1-1,2-5)$
	$C_1^* = 3, C_2^* = 4$	$R_1^* = 5, R_2^* = 3$	$(3,2)$	$(0-0,1-3,2-5)$

³ Երրորդ փուլում կարելի է դիտարկել նաև ներդրումային գումարներին առնչվող դեպքեր: Ընդ որում, ներդրվող գումարը կարող է լինել ոչ բնական թիվ: Եթե առաջին (կամ երկրորդ) մասնաճյուղը հրաժարվի, ապա դա կդիտարկենք երրորդ՝ վերջին փուլում:

**7.1. ԽԱՂԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ
ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ**

Խաղերի տեսությունն ուսումնասիրում է հակամարտ կողմերի (խաղի մասնակիցներ, խաղացողներ) որոշումների ընդունումն այնպիսի իրավիճակներում, երբ դրանց արդյունքների վրա ազդում են մյուս մասնակիցների ձեռնարկած գործողությունները: Նման իրավիճակներն ընդունված է անվանել խաղային: Խաղերի տեսության հետազոտման առարկա են այնպիսի իրավիճակները, որոնցում կարևոր դեր են խաղում հակամարտությունները (ընդհարում, բախում, առճակատում) և համատեղ գործողությունները:

Խաղերի տեսությունն առաջին անգամ համակարգված ձևով շարադրել են Ջ. Ֆոն Նեյմանը և Օ. Մորգենշտեռնը 1944 թ.: Երկրորդ համաշխարհային պատերազմի ժամանակ և դրանից հետո խաղերի տեսությամբ լրջորեն հետաքրքրվեցին զինվորականները, որոնք դրանում տեսան ռազմավարական վերլուծությանն անհրաժեշտ մոտեցումներ: Այնուհետև խաղերի տեսության գաղափարները կիրառվեցին տնտեսական խնդիրների լուծման նպատակով: Ներկայումս կատարվում են բազմաթիվ հետազոտություններ, որոնք նպատակաուղղված են ընդլայնելու խաղերի տեսության կիրառման ոլորտները:

Խաղային իրավիճակների մաթեմատիկական ներկայացումը հանգում է խաղի մասնակիցների ռազմավարությունների (ստրատեգիաների) և դրանց կիրառման հետևանքով առաջացող շահումների (կամ կորուստների) թվային արժեքների գնահատմանը: Արդյունքում խաղը դառնում է ձևական (ֆորմալ) օբյեկտ, որը կարող է ենթարկվել մաթեմատիկական վերլուծության:

7.1.1. Խաղերի դասակարգումը

Խաղերը կարելի է դասակարգել որոշակի սկզբունքներով՝ ըստ խաղացողների և ռազմավարությունների քանակների, շահումի ֆունկցիաների հատկությունների, խաղի ընթացքում նախնական բանակցությունների, խաղացողների միջև փոխգործողության հնարավորության և այլն⁴:

⁴ Оуэн Г., Теория игр., М.: “Мир”. 1971.

Կախված **խաղացողների քանակից**՝ տարբերակվում են երկու, երեք և ավելի մասնակիցներով խաղեր: Սկզբունքորեն հնարավոր են նաև խաղեր՝ անվերջ քանակի խաղացողներով:

Համաձայն դասակարգման մեկ այլ սկզբունքի՝ **ռազմավարությունների քանակի**, տարբերակվում են վերջավոր և անվերջ ռազմավարություններով խաղեր: **Վերջավոր խաղերում** խաղացողներն իրենց տրամադրության տակ ունեն վերջավոր թվով հնարավոր ռազմավարություններ (օրինակ՝ **արծվախաղում** խաղացողներն ունեն երկու հնարավոր քայլ՝ նրանք կարող են ընտրել «զինանշան» կամ «թիվ»): Վերջավոր խաղերում ռազմավարությունները հաճախ անվանում են **մաքուր**: Համապատասխանաբար՝ **անվերջ խաղերում** խաղացողներն ունեն անվերջ քանակի հնարավոր ռազմավարություններ (այսպես՝ վաճառող-գնորդ հակամարտ իրավիճակում մասնակիցներից յուրաքանչյուրը կարող է հայտնել վաճառվող (գնվող) ապրանքի ցանկացած, իրեն հարմար գինը և քանակը):

Խաղերը դասակարգվում են նաև ըստ **շահումի ֆունկցիայի** (վճարային ֆունկցիաների) հատկությունների: Խաղերի տեսության կարևոր, պարզագույն դեպքերից մեկն էլ այն է, երբ մի խաղացողի շահումը հավասար է մյուս խաղացողի կորստին, այսինքն՝ խաղացողների միջև առկա է լիակատար հակամարտություն: Նմանատիպ խաղերն անվանվում են **հակամարտ** կամ **զրոյական գումարով** (արծվախաղ կամ «զինանշան», «թիվ»): Դրանց ուղիղ հակադրությունն են հաստատուն տարբերությամբ խաղերը, որոնցում խաղացողները կա՛մ միաժամանակ հաղթում են, կա՛մ միաժամանակ պարտվում, հետևաբար՝ նրանց ձեռնատու է գործել միասին: Այդ երկու ծայրահեղ դեպքերի միջև գոյություն ունեն բազմաթիվ ոչ զրոյական գումարով խաղեր, որտեղ խաղացողների միջև հնարավոր են և՛ հակամարտություններ, և՛ գործողությունների համաձայնեցումներ:

Կախված խաղացողների միջև նախնական բանակցությունների հնարավորությունից՝ տարբերակվում են **կոոպերատիվ** և **ոչ կոոպերատիվ** խաղեր: Խաղը կոչվում է կոոպերատիվ, եթե մինչդրա սկսվելը խաղացողներն իրավունք ունեն կազմելու դաշինք (կոալիցիա) և ընդունելու փոխապարտավորեցնող համաձայնություններ իրենց ռազմավարությունների վերաբերյալ: Իսկ այն խաղերը, որտեղ խաղացողներն իրավունք չունեն համաձայնեցնելու իրենց ռազմավարությունները, կոչվում են **ոչ կոոպերատիվ**: Ակնհայտ է, որ բոլոր հակամարտ խաղերը կարող են համարվել ոչ կոոպերատիվ: Կոոպերատիվ խաղի օրինակ կարող է ծառայել

խորհրդարանում դաշինքների ձևավորումը, երբ քվեարկությամբ պետք է ընդունել այլ դաշինքին ոչ ձեռնառու որոշումներ:

Խաղերը կարող են դասակարգվել նաև ըստ **տեղեկատվության ծավալի և բնույթի**: Խաղի մասնակիցը կարող է ունենալ լրիվ (շախմատ) կամ մասնակի (նարդի) տեղեկատվություն մյուս մասնակիցների հնարավոր քայլերի մասին: Ընդ որում, վերջին դեպքում տեղեկատվության ոչ լրիվ լինելու բնույթը զանազան խաղերում կարող է տարբեր լինել. օրինակ՝ նարդում հակառակորդի հնարավոր քայլերը հայտնի չեն երկու խաղացողին էլ, իսկ թղթախաղի շատ տեսակներում խաղացողը չի տեսնում հակառակորդների քարտերը: Բացի այդ, բազմաթիվ խաղերում որոշակի տեղեկատվություն կարող է համարվել նաև հակառակորդի խաղաոճի (հարձակողական կամ պաշտպանողական, դիրքային կամ կոմբինացիոն) մասին որոշակի խորությամբ պատկերացում ունենալը և այլն:

Տարբերակվում են նաև **ստատիկ և դինամիկ** խաղեր: Ստատիկ խաղերում մասնակիցները որոշումներ են կայացնում (քայլեր են անում) միաժամանակ՝ տեղյակ չլինելով մյուսների որոշակի քայլերի մասին, իսկ կատարված քայլերը ենթակա չեն վերանայման: Դինամիկ խաղերում գոյություն ունեն քայլերի ավելի բարդ հերթականություն և կանոններ:

7.1.2. Խաղերի ձևայնացումը

Դիտարկենք խաղի դասական ձևակերպում: Եթե բոլոր խաղացողների / բազմությունը վերջավոր է, ապա այն կարող է առաջադրվել խաղացողների պարզ թվարկմամբ. օրինակ՝ $I = \{1, 2\}$ ՝ արծվախաղի ժամանակ, $I = \{\text{վաճառող, գնորդ}\}$ ՝ մենաշնորհային պայմանով, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ՝ խորհրդարանում քվեարկության արդյունքները ներկայացնելիս:

Նշանակենք i -րդ խաղացողի ռազմավարությունների բազմությունը X_i -ով: Արծվախաղի ժամանակ ամեն խաղացող իր տրամադրության տակ ունի երկու ռազմավարություն՝ $X_i = \{\text{թիվ, գինա-նշան}\}$: Քվեարկության յուրաքանչյուր մասնակից {կողմ, դեմ, ձեռնպահ} ռազմավարությունների բազմությունում ունի ընտրության 3 հնարավորություն: Շուկայում փոխգործողության դեպքում ինչպես վաճառողը, այնպես էլ գնորդը կարող են նշանակել որոշակի գին վաճառվող (գնվող) ապրանքի համար, այսինքն՝ X_i , որտեղ $P_i \geq 0$ յուրաքանչյուրի ռազմավարության բազմությունն է:

Ամեն մի խաղափուլի ընթացքում խաղացողն ընտրում է որոշակի $x_i \in X_i$ ռազմավարություն, որի արդյունքում ձևավորվում է $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ռազմավարությունների հավաքածու, որը կոչվում է **իրավիճակ**: Այսպես՝ խորհրդարանում իրավիճակը նկարագրվում է քվեարկության հետևյալ արդյունքների հերթականությամբ՝ {կողմ, կողմ, դեմ, կողմ, ...}:

Խաղացողների շահագրգռվածությունն իրավիճակներում արտահայտվում է նրանով, որ i -րդ խաղացողի համար յուրաքանչյուր **ելքի** դեպքում վերագրվում է թիվ, որն արտահայտում է նրա հետաքրքրությունների բավարարման մակարդակը: Այդ թիվը կոչվում է i -րդ խաղացողի **շահում** և նշանակվում է $h_i(x)$ -ով, իսկ իրավիճակների և շահումների հավաքածուների միջև առկա համապատասխանությունը՝ այդ խաղացողի **H_i շահումի (վճարման) ֆունկցիա**:

Երկու մասնակիցների վերջավոր խաղի դեպքում խաղացողի վճարման ֆունկցիան հարմար է ներկայացնել **վճարումների (շահումների) մատրիցի** տեսքով, որտեղ տողից տող փոխվում են մի խաղացողի ռազմավարությունները, իսկ սյունից սյուն՝ մյուսինը, ընդ որում, մատրիցի վանդակներում ամեն մի խաղացողի համար նշվում են շահումների չափերը յուրաքանչյուր ձևավորվող իրավիճակում (այդպիսի ներկայացվող խաղերը կոչվում են **մատրիցային**):

Օրինակ՝ արծվախաղի ժամանակ յուրաքանչյուր խաղացող ունի 2 ռազմավարություն: Եթե խաղացողներն ընտրում են նույն ռազմավարությունը, այսինքն՝ երկուսն էլ ասում են «զինանշան» կամ երկուսն էլ ասում են «թիվ», ապա 1-ին խաղացողը շահում է 1 միավոր երկրորդ խաղացողից: Իսկ այն իրավիճակում, երբ երկու խաղացողն ընտրում են տարբեր ռազմավարություններ, 1-ինը պարտվում է 1 միավոր, որը շահում է 2-րդը:

Արդյունքում 1-ին խաղացողի H_1 շահումների մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը.

<i>2-րդ խաղացողի ռազմավարություն</i>	<i>Չինանշան</i>	<i>Թիվ</i>
<i>1-ին խաղացողի ռազմավարություն</i>		
Չինանշան	1	-1
Թիվ	-1	1

Խաղի 2-րդ մասնակցի շահի տեսակետից, H_2 շահումներով մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը.

<i>1-ին խաղացողի ռազմավարություն</i> \ <i>2-րդ խաղացողի ռազմավարություն</i>	<i>Զինանշան</i>	<i>Թիվ</i>
Զինանշան	-1	1
Թիվ	1	-1

Հակամարտ խաղերի դեպքում, որտեղ մի խաղացողի շահումը հավասար է մյուսի կորստին (**զրոյական գումարով խաղեր**), տեղի ունի $H_1 = -H_2$ պայմանը:

Հաճախ ակնառու լինելու նպատակով երկու խաղացողի շահումների մատրիցը համատեղվում է մեկում, ինչը ամբողջական պատկերացում է տալիս խաղի մասին:

<i>1-ին խաղացողի ռազմավարություն</i> \ <i>2-րդ խաղացողի ռազմավարություն</i>	<i>Զինանշան</i>	<i>Թիվ</i>
Զինանշան	(1, -1)	(-1, 1)
Թիվ	(-1, 1)	(1, -1)

Այս մատրիցի յուրաքանչյուր վանդակում փակագծերում ծախից նշված են առաջին, իսկ աջից՝ երկրորդ խաղացողի շահումների արժեքները:

Դիտարկենք շահումների մատրիցը ոչ զրոյական գումարով դասական խաղի օրինակով, որը կոչվում է «**Կալանավորի երկրնտրանք**»։ Խաղի բովանդակությունը հետևյալն է. երկու հանցագործ սպասում են կատարած հանցանքի համար դատարանի վճռին: Փաստաբանը գաղտնաբար յուրաքանչյուր հանցագործի առաջարկում է թեթևացնել սեփական վիճակը (ընդհուպ կալանքից ազատվելը), խոստովանելով և վկայություն տալով հանցակցի մասին, որին սպառնում է 10 տարվա բանտարկություն: Եթե նրանցից ոչ մեկը չխոստովանի, ապա երկուսին էլ սպառնում է բանտարկություն որոշակի ժամկետով (օրինակ՝ մեկ տարի)՝ փոքր հանցագործության մեղադրանքով: Եթե երկու հանցագործն էլ անկեղծորեն խոստովանեն, ապա երկուսն էլ կդատապարտվեն 5 տարվա բանտարկության: Երկու կալանավորն էլ ունեն ռազմավարության ընտրության հնարավորություն: չխոստովանել կամ խոստովանել՝ դրանով իսկ մատնելով հանցակցին: Արդյունքում կարելի ստանալ երկու խաղացողի շահումների հետևյալ մատրիցը:

<i>2-րդ խաղացողի նազմավարություն</i> <i>1-ին խաղացողի նազմավարություն</i>	<i>Խոստովանել</i>	<i>Չխոստովանել</i>
Խոստովանել	(5, 5)	(0, 10)
Չխոստովանել	(10, 0)	(1, 1)

Այժմ կառուցենք անվերջ խաղի շահումի ֆունկցիան: Ենթադրենք՝ կա միևնույն ապրանքը վաճառող միայն երկու ֆիրմա, որոնք իրար հետ կապված չեն գնի, շուկաների կամ բաժնեմասերի վերաբերյալ համաձայնությամբ (**դուռպոլիս**): Ամեն խաղացող կարող է հայտարարել ապրանքի իր **P** գինը, որով նա ուզում է վաճառել որոշակի քանակի ապրանք: Ակնհայտ է, որ սպառողներն ապրանքը կգնեն այն ֆիրմայից, որը հայտարարել է ավելի ցածր գին կամ էլ հավասար կբաշխեն իրենց պահանջարկը ֆիրմաների միջև, եթե վերջիններս հայտարարել են միևնույն գինը:

7.2. ՀԱԿԱՍԱՐՏ ԽԱՂԵՐ⁵

Խաղերի տեսությունում, որպես հիմնական ենթադրություն, ընդունվում է, որ յուրաքանչյուր խաղացող հակառակորդի ցանկացած գործողությունների դեպքում ձգտում է **ապահովել իր առավելագույն շահումը՝ խաղն անվերջ թվով պարտիաներով շարունակվելու դեպքում**: Ենթադրենք՝ տրված է վերջավոր, հակամարտ խաղ՝ 1-ին խաղացողի շահումների **H** մատրիցով և, համապատասխանաբար, 2-րդ խաղացողի շահումների **-H** մատրիցով: 1-ին խաղացողը կարծում է, որ ինչ նազմավարություն էլ ինքն ընտրի, 2-րդ խաղացողը կընտրի այնպիսին, որ առավելագույնի կհասցնի սեփական շահումը՝ դրանով իսկ նվազագույնի հասցնելով 1-ին խաղացողի շահումը: 1-ին խաղացողի օպտիմալ նազմավարությունը, որն ապահովում է նրա առավելագույն հնարավոր շահումը, անկախ հակառակորդի ընտրած նազմավարությունից, ամենաբարձր վճարումների ընտրության մեջ է: Այսպիսով՝ 1-ին խաղացողն ընտրում է i-րդ նազմավարություն, որն է.

$$\max_i \min_j h_{ij} :$$

խնդրի լուծումը:

⁵ Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В., Теория игр., СПб.: БХВ-Петербург, 2012, 432 с.

Նման ձևով, 2-րդ խաղացողը ձգտում է իր համար ապահովել առավելագույն շահում (ինչը համարժեք է կորստի նվազագույնին)՝ անկախ մրցակցի ընտրած ռազմավարությունից: Նրա օպտիմալ ռազմավարությունը կլինի **H** մատրիցի մաքսիմալ վճարի փոքրագույն արժեքով սյունը: Այսպիսով՝ 2-րդ խաղացողը կընտրի j-րդ ռազմավարությունը, որն է.

$$\min_i \max_j h_{ij} :$$

Խնդրի լուծումը:

Այսպիսով՝ եթե 1-ին խաղացողը հետևում է ընտրված ռազմավարությանը (կոչվում է **մաքսիմինային**), ապա նրա շահումը բոլոր դեպքերում չի լինի ավելի փոքր մաքսիմինային արժեքից, որը կոչվում է նաև **խաղի ստորին գին**, այսինքն՝

$$h_{ij} \geq \max_i \min_j h_{ij} :$$

Եթե 2-րդ խաղացողն էլ հետևում է իր **մինիմաքսային** ռազմավարությանը, որը կոչվում է նաև **խաղի վերին գին**, ապա.

$$h_{ij} \leq \min_i \max_j h_{ij} :$$

Եթե խաղի վերին գինը հավասար է ստորինին, այսինքն՝

$$\max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij} ,$$

ապա երկու խաղացողն էլ ստանում են իրենց երաշխավորված վճարները, իսկ այդպիսի h_{ij}^* -ը կոչվում է **խաղի գին**: Շահումների մատրիցի h_{ij}^* տարրը, որը համապատասխանում է մաքսիմալ և մինիմալ ռազմավարություններին, կոչվում է **H** մատրիցի **թամբային կետ**: **Թամբային կետը կարող է միակը չլինել**, բայց բոլոր այդ կետերում h_{ij}^* -ը կունենա նույն արժեքը:

Այն դեպքում, երբ հակամարտ խաղի գինը հավասար է 0-ի, կոչվում է **արդար**:

Դիտարկենք խաղ, որտեղ 1-ին խաղացողն իր տրամադրության տակ ունի երկու, իսկ 2-րդ խաղացողը՝ երեք ռազմավարություն: Ենթադրենք՝ 1-ին խաղացողի շահումների մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը.

$$H_i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} :$$

Քանի որ դիտարկում ենք հակամարտ խաղի օրինակ, 2-րդ խաղացողի շահումների մատրիցը հավասար է H_1 -ին՝ վերցված հակառակ նշանով, այսինքն՝ $H_2 = -H_1$:

1-ին խաղացողը հույս ունի, որ եթե ընտրի առաջին ռազմավարությունը (այսինքն՝ H_1 մատրիցի առաջին տողը), ապա հակառակորդը կարող է ընտրել իր երկրորդ ռազմավարությունը (երկրորդ սյունը), այնպես որ, շահումը հավասար կլինի 1-ի: Եթե նա ընտրի երկրորդ ռազմավարությունը, ապա հակառակորդը կարող է ընտրել իր առաջին ռազմավարությունը, այնպես որ, շահումը հավասար կլինի -1-ի: Վերլուծելով ստացված արժեքները՝ 1-ին խաղացողը կանգ կառնի իր առաջին ռազմավարության վրա, որն ապահովում է առավելագույն 1 միավորի հավասար **երաշխավորված շահում**:

Նման ձևով, 2-րդ խաղացողը դիտարկում է իր համար վատագույն տարբերակները, դուրս գրելով յուրաքանչյուր սյան մեծագույն տարրերը, որոնք են 2, 1 և 5 թվերը: Վերցնելով այդ մեծագույն կորուստներից նվազագույնը՝ նա նախապատվությունը տալիս է դրան համապատասխանող՝ իր 2-րդ ռազմավարությանը, որի դեպքում նվազագույն կորուստը հավասար է 1 միավորի:

Հետևաբար՝ այս խաղում երկու մասնակցի համար էլ գոյություն ունեն օպտիմալ ռազմավարություններ, այսինքն.

$$h^* = \max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij} = 1:$$

Այսպիսով՝ վերը նկարագրված խաղում հակառակորդներից յուրաքանչյուրի համար խելամիտ և ձեռնտու է հետևել իր օպտիմալ ռազմավարությանը: Մատրիցային հակամարտ խաղը, որի համար՝ $\max_i \min_j h_{ij} = \min_j \max_i h_{ij}$, կոչվում է **լրիվ կայուն** կամ խաղ,

որն **ունի լուծում մաքուր ռազմավարություններով**:

Սակայն, ոչ բոլոր մատրիցային հակամարտ խաղերն են լրիվ կայուն: Այն խաղերը, որոնց ստորին և վերին գները հավասար չեն, կոչվում են **ոչ լրիվ կայուն** (կամ որոնք չունեն լուծում մաքուր ռազմավարություններով): Հետևյալ մատրիցը ներկայացնում է նման խաղի օրինակ.

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \end{pmatrix}:$$

$$\text{Այս խաղի համար՝ } \max_i \min_j h_{ij} = -2 < 4 = \min_j \max_i h_{ij}:$$

Նկարագրված իրավիճակում խաղացողների համար կարևոր է, որ հակառակորդը չգուշակի հաջորդ խաղափուլում օգտագործվող ռազմավարությունը: Այդ նպատակով նրանք պետք է կիրառեն, այսպես կոչված, **խառը ռազմավարություններ**: Ըստ էության, վերջինս մաքուր ռազմավարությունների **պատահական ընտրություն է**: Մաթեմատիկորեն այն կարելի է ներկայացնել որպես հավանականության բաշխում տվյալ խաղացողի մաքուր ռազմավարությունների բազմությունում: Արդյունքում՝ $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, որտեղ $x_i \geq 0$, համապատասխանում է 1-ին խաղացողի կողմից i-րդ ռազ-

մավարության կիրառման հավանականությանը, որտեղ $\sum_i x_i = 1$,

որոշելով այդ խաղացողի խառը ռազմավարությունը: Նման ձևով որոշվում է 2-րդ խաղացողի՝ $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ խառը ռազմավարությունը: Հավանականությունը, որ 1-ին խաղացողը կընտրի i-րդ, իսկ 2-րդ խաղացողը՝ j-րդ ռազմավարությունը, հավասար է $x_i y_j$ - ի: Այդ դեպքում վճարումը հավասար է h_{ij} : Ակնհայտ է, որ 1-ին խաղացողի շահումի մաթեմատիկական սպասումը կլինի.

$$v_i = \sum_j \sum_i x_i h_{ij} y_j$$

կամ մատրիացային տեսքով՝ $v_i = XHY'$:

1-ին խաղացողն իր խառը ռազմավարությունների բազմությունում, ձգտելով հասնել առավելագույն երաշխավորված շահումների, ընտրում է հավանականությունների X վեկտորն այնպես, որ ստանա սպասվող շահումների նվազագույն արժեքներից առավելագույնը: Այսինքն՝ լուծվում է հետևյալ խնդիրը.

$$v_1 = \max_i \min_j XHY' :$$

Նման ձևով, 2-րդ խաղացողի նպատակն է հասնել իր առավելագույն հնարավոր կորուստներից նվազագույնին, այսինքն՝ լուծվում է հետևյալ խնդիրը.

$$v_2 = \max_j \min_i XHY' :$$

Խաղերի տեսության հիմնական արդյունքը Նեյմանի **մինի-մաքսի թեորեմն է**, ըստ որի՝ գրոյական գումարով վերջավոր մատրիցային խաղը միշտ ունի խառը ռազմավարություններով լուծում: Բացի դրանից, $v_1 = v_2 = v$:

Ինչպես լրիվ կայուն խաղերի համար, 1-ին խաղացողի X^* ռազմավարությունը կոչվում է **մաքսիմին**, իսկ 2-րդ խաղացողի Y^* ռազմավարությունը՝ **մինիմաքս**, v -ի արժեքը՝ **խաղի գին**: Այն դեպքում, երբ $v = 0$, խաղը կոչվում է **արդար**:

Ընդհանրապես, ոչ մեծ չափողականությամբ խաղերի համար օպտիմալ ռազմավարություններ գտնելը հեշտ է, սակայն հաշվարկները բարդանում են դրանց քանակի ավելացմանը զուգընթաց: Օպտիմալ ռազմավարության որոնման համար առաջարկվում են մի քանի մոտեցումներ:

Եթե կան կրկնվող ռազմավարություններ, ապա վճարումների մատրիցի չափողականության փոքրացման համար դրանք հանվում են դիտարկումից՝ թողնելով միայն մեկը:

Չափի փոքրացման համար օգտագործվում են նաև **տողերի գերիշխումը (դոմինանտությունը)** այլ տողերի նկատմամբ և **սյուների գերիշխումը** այլ սյուների նկատմամբ: Ընդհանրապես, ասում են, որ H մատրիցի k -րդ տողը գերիշխող է i -րդ տողի նկատմամբ (այսինքն՝ մի մաքուր ռազմավարությունը գերիշխում է մյուսին), եթե.

$$h_{ij} \leq h_{kj} \text{ բոլոր } j\text{-երի համար,}$$

$$h_{ij} < h_{kj} \text{ առնվազն մեկ } j\text{-ի համար:}$$

Նույնկերպ, i -րդ սյունը գերիշխող է j -րդ սյան նկատմամբ, եթե.

$$h_{il} \leq h_{jl} \text{ բոլոր } l\text{-երի համար,}$$

$$h_{il} < h_{jl} \text{ առնվազն մեկ } l\text{-ի համար:}$$

Այդ սահմանման իմաստն այն է, որ գերիշխող ռազմավարությունը ոչ մի դեպքում ավելի վատը չէ, իսկ որոշ դեպքերում՝ նույնիսկ ավելի նախընտրելի է, քան մյուս ռազմավարությունը: Այստեղից հետևում է, որ բոլոր այլ ռազմավարությունների կիրառումն անիմաստ է: Հետևաբար՝ օպտիմալ խառը ռազմավարություններում այլ տողերի և սյուների օգտագործման հավանականությունները միշտ հավասար են զրոյի, ուստի խաղի լուծման ժամանակ **բոլոր նման տողերը և սյուները կարող են հեռացվել**, որի արդյունքում կփոքրանա մատրիցի չափողականությունը:

Ստացված ավելի պարզ լուծումը կարելի է օգտագործել որպես նախնական խաղի լուծում՝ **հեռացված սյուներին և տողերին վերագրելով զրոյական հավանականություններ**:

Վճարումների մատրիցի պարզեցման մեկ այլ մեթոդ հիմնված է խաղերի տեսությունում հայտնի մի հատկության վրա, ըստ որի՝ վճարումների մատրիցի **աֆինյան ձևափոխումը** (H մատրիցի բո-

լոր տարրերի ձևափոխումը, համաձայն $h'_{ij} = ah_{ij} + b$ բանաձևի, որտեղ $a \neq 0$) **չի փոխում խաղի լուծումը**: Բացի այդ, ձևափոխված խաղի v' գինը կարող է ստացվել նախնական խաղի գնից նույն կանոնով. $v' = av + b$: Դա նշանակում է, որ խաղի առաջադրման համար սկզբունքորեն միևնույն է, թե ինչ միավորներով է հաշվարկվում շահումը (օրինակ՝ դրամ կամ դոլար): Որոշակի՝ ամրագրված b չափով մատրիցի բոլոր տարրերի ավելացումը (պակասեցումը) կփոխի խաղացողների շահումը (կորուստը) նույն չափով՝ **չփոխելով** խաղի լուծումը:

Այդ հատկությունը կարելի է օգտագործել վճարումների մատրիցի տեսքն ավելի պարզ և ակնառու դարձնելու համար: Օրինակ՝ եթե նախնական մատրիցում առկա են ընդհանուր հայտարարներով կոտորակներ, ապա ամբողջ մատրիցը կարելի է բազմապատկել որոշակի հաստատուն մեծությամբ, որպեսզի ստացվեն ամբողջ թվեր, եթե մատրիցի վանդակների մեծամասնությունում առկա են նույն թվերը, ապա դրանց արժեքը կարելի է հանել մատրիցի բոլոր տարրերից, որպեսզի այդ վանդակներում ստացվեն զրոներ: Այդ հատկությունը թույլ է տալիս նաև ցանկացած հակամարտ մատրիցային խաղ դարձնել արդար. այդ նպատակով պետք է վճարումների մատրիցի բոլոր տարրերից հանել խաղի գինը:

Մատրիցային խաղերի լուծման մեկ այլ մեթոդ հիմնված է վերը նշված հատկության վրա. երաշխավորված է, որ 1-ին խաղացողի օպտիմալ խառը ռազմավարությունների դեմ 2-րդ խաղացողի կողմից մաքուր ռազմավարությունների օգտագործումը թույլ չի տալիս, որ վերջինս կորցնի ավելի քիչ (շահել ավելին), քան խաղի v գինն է: Դա թույլ է տալիս 1-ին խաղացողի համար ձևակերպել հետևյալ խնդիրը.

$$\begin{aligned} &\text{գտնել } \max v \\ &\sum_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} h_{ij} x_i \leq v, \\ &\sum_{i=1,m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0: \end{aligned}$$

Այսպիսով՝ նկարագրվածը գծային ծրագրավորման խնդիր է և հեշտությամբ լուծվում է: Ընդհանուր դեպքում, $m \times n$ -չափանի հակամարտ մատրիցային խաղի պարագայում պետք է լուծել գծային ծրագրավորման խնդիրների երկակի զույգը, որի արդյունքում կգտնվեն օպտիմալ ռազմավարությունների x^*, y^* հավաքածուն և խաղի v գինը:

7.3. ՈՉ ԶՐՈՅԱԿԱՆ ԳՈՒՄԱՐՈՎ ԽԱՂԵՐ: ԿՈՌՊԵՐԱՏԻՎ ԽԱՂԵՐ

Ոչ զրոյական գումարով խաղերում որքան որ շահում է խաղացողներից մեկը, նույնքան չի կորցնում մյուսը: Ավելին, նրանք կարող են և՛ հաղթել, և՛ պարտվել միաժամանակ: Քանի որ այս դեպքում խաղացողների շահերն ամբողջովին չեն հակադրվում միմյանց, նրանց վարքը դառնում է ավելի բազմազան: Այսպես՝ եթե զրոյական գումարով խաղում յուրաքանչյուր խաղացողի ձեռնտու չէ հայտնել մյուսին իր ռազմավարությունը (դա կարող է նվազեցնել նրա շահումը), ապա ոչ զրոյական գումարով խաղում ցանկալի է ինչ-որ կերպ համակարգել գործողությունները խաղընկերոջ հետ կամ որևէ եղանակով ազդել նրա գործողությունների վրա:

Ոչ զրոյական գումարով խաղերը կարող են լինել **կոոպերատիվ** և **ոչ կոոպերատիվ**: Ոչ կոոպերատիվ խաղերում խաղացողներն իրենց որոշումներն ընդունում են միմյանցից անկախ, քանի որ համաձայնության իրականացումն անհնար է կամ արգելված խաղի կանոններով: Վերը նկարագրված՝ «**Կալանավորի երկընտրանք**» խաղը ներկայացնում է ոչ զրոյական գումարով երկու անձանց խաղ, որտեղ, ըստ խաղի պայմանների, խաղացողների միջև համագործակցությունը դժվարացված է⁶:

Ոչ կոոպերատիվ խաղերի լուծման նպատակը հավասարակշռության կետերի որոշումն է: Խաղերի տեսությունում հավասարակշռության հասկացությունն ավելի ընդգրկում է, քան օպտիմալության տեսությունում: Ընդհանուր առմամբ, X , Y ռազմավարությունների զույգը, ըստ Նեշի, 1-ին և 2-րդ խաղացողների համար կոչվում է **հավասարակշռության կետ**, եթե խաղացողներից ոչ մեկը շահագրգռված չէ միայնակ շեղվել իր ռազմավարությունից, այսինքն՝ եթե.

$$H_1(X, Y^*) \leq H_1(X^*, Y^*), \quad \text{ցանկացած } X \text{ -ի համար,}$$

$$H_2(X, Y^*) \leq H_2(X^*, Y^*), \quad \text{ցանկացած } Y \text{ -ի համար:}$$

Հավասարակշռության կետի մեծնատիպ սահմանումը պահանջում է նաև n մասնակիցներով խաղի դեպքում:

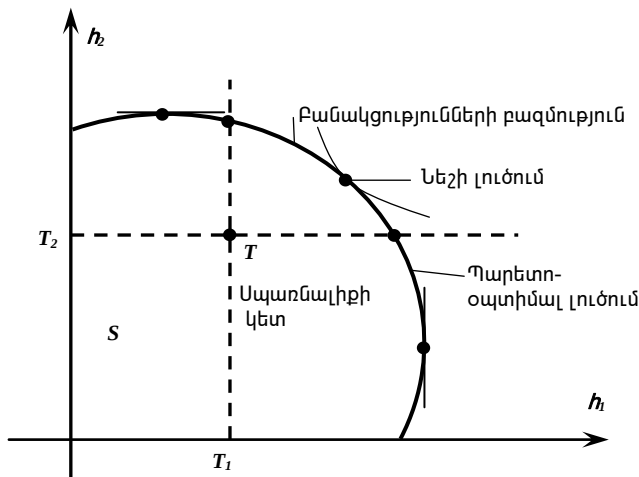
Ապացուցված է, որ ցանկացած վերջավոր, ոչ զրոյական գումարով ոչ կոոպերատիվ խաղի (կոչվում է նաև **երկմատրիցային (բիմատրիցային)**) համար միշտ գոյություն ունեն առնվազն մեկ զույգ հավասարակշռված խառը ռազմավարություններ: Ընդհանուր դեպքում, հավասարակշռված լուծումը կարող է միակը չլինել, ընդ

⁶ Мулен Э., Теория игр., пер. с франц. , М.: "Мир", 1985, 200 с.

որում, դրանցից ամեն մեկին կհամապատասխանեն խաղացողների շահումների տարբեր արժեքներ:

Ոչ գրոյական գումարով խաղը կոչվում է **կոոպերատիվ**, եթե խաղացողներին խաղից առաջ թույլատրվում է քննարկել իրենց ռազմավարությունները և պայմանավորվել համատեղ գործողությունների վերաբերյալ. այսինքն՝ նրանք կարող են ստեղծել դաշինք (կոալիցիա, կամավոր միություն): Կոոպերատիվ խաղում հիմնական խնդիրն ընդհանուր շահումի բաշխումն է դաշինքի անդամների միջև:

Երկու մասնակից ունեցող խաղերում ենթադրվում է, որ խաղացողները չեն կարող ազդել միմյանց վրա, քանի դեռ չեն եկել համաձայնության: Այսպիսով՝ խաղը սահմանվում է որպես **S** բազմություն h_1 և h_2 փոփոխականների տարածությունում, որը որոշում է մասնակիցների շահումները: Բացի այդ, տրված են շահումի այն T_1 , T_2 արժեքները, որոնք կարող են ստանալ խաղացողները՝ առանց դաշինք կազմելու խաղընկերոջ հետ: Սովորաբար, ենթադրվում է, որ **S**-ը փակ, ուռուցիկ և վերևից սահմանափակ բազմություն է (T_1 , T_2) կոորդինատներով: **T**-ն կոչվում է **սպառնալիքի կետ** (գծապատկեր 7.1):



Գծապատկեր 7.1. Հնարավոր շահումների բազմությունը, Պարետո-օպտիմալ բազմությունը (լուծում), սպառնալիքի կետը, բանակցությունների բազմությունը և Նեշի լուծումը երկու մասնակից ունեցող կոոպերատիվ խաղում⁷

⁷ Интрилигатор М., Математические методы оптимизации и экономическая теория, М., 2003.

Հնարավոր շահումների բազմությունում առանձնացվում է **Պարետո-օպտիմալ լուծումների**, այսինքն՝ **S**-ին պատկանող բոլոր այն կետերի բազմությունը, որի դեպքում խաղացողներից մեկի շահումի աճը հնարավոր է միայն խաղընկերոջ շահումի նվազման հաշվին:

Պարետո-օպտիմալ բազմության բոլոր կետերը, որոնք միաժամանակ գտնվում են սպառնալիքի T կետից վերև և աջ, կազմում են **բանակցային բազմությունը (խաղի միջուկը)**: Ակնհայտ է, որ խաղացողների համար անհմաստ է պայմանավորվել այն լուծումների վերաբերյալ, որոնք չեն պատկանում բանակցությունների բազմությանը, քանի որ նրանցից յուրաքանչյուրն առանց համագործակցելու կարող է ապահովել ոչ պակաս շահում:

Վերջապես, բանակցությունների բազմությունում առանձնացվում է **Նեշի լուծման N կետը**, որտեղ խաղացողների սպառնալիքի կետի նկատմամբ շահումների հավելաճերի արտադրյալն ընդունում է մեծագույն արժեք.

$$\max(h_1 - T_1)(h_2 - T_2):$$

Խաղերի տեսությունում ցույց է տրված, որ եթե հնարավոր վճարների **S** բազմությունը ուռուցիկ է, փակ է և վերևից սահմանափակ, ապա Նեշի N կետը գոյություն ունի և միակն է: Նեշի կետը ներկայացնում է կոոպերատիվ խաղի հնարավոր լուծումների տարբերակ, որից ոչ մի խաղացող հիմք չունի հրաժարվելու:

Պարզաբանենք ներկայացված հասկացությունը **«Ընտանեկան վեճ»**⁸ խաղի⁸ օրինակով: Համաձայն դրա պայմանների, ընտանեկան զույգը՝ ամուսինը և կինը, ամեն երեկո լուծում են հետևյալ խնդիրը. ինչպե՞ս անցկացնել ազատ ժամանակը: Քաղաքում, որտեղ նրանք ապրում են, գոյություն ունի երկու տեսակի ժամանց՝ բալետ և ֆուտբոլ: Ընդ որում, կինը նախընտրում է բալետը, իսկ ամուսինը՝ ֆուտբոլը: Ամուսիններն այնքան են կապված իրար հետ, որ իրենց սիրելի զվարճանքը միայնակ վայելել չեն ցանկանում: Այսպես՝ եթե ամուսինները երեկոյան միասին գնում են բալետ դիտելու, ապա կինը ստանում է առավելագույն հաճույք (օրինակ՝ 4 միավոր), իսկ ամուսինը, ով բալետ չի սիրում, նվազագույն՝ 1 միավոր: Իրավիճակը ճիշտ հակառակն է, երբ կինն ամուսնու հետ գնում է ֆուտբոլ: Ամուսինն իր սիրելի թմին խաղից և կնոջ ներկայությունից ստանում է հաճույքի 4, իսկ կինը՝ 1 միավոր: Ըստ եության, ամուսինը կարող է գնալ ֆուտբոլ, իսկ կինը՝ բալետ միայնակ, սակայն այդպիսով հաճույքի չափը կնվազի, և ամեն մեկը կստանա 2 միավոր: Եվ, վերջապես, երեկոն կանցնի լրիվ անօգուտ

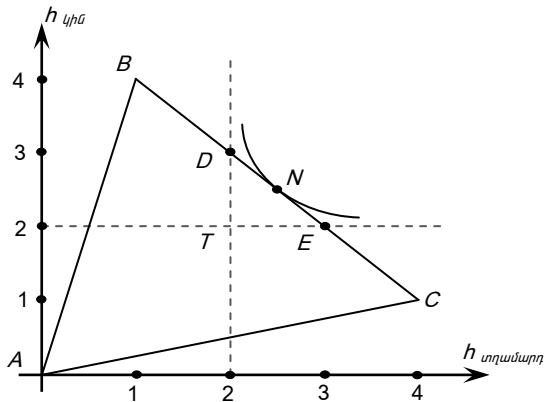
⁸ Пиндайк Р., Рубинфельд Д., Микроэкономика. 5-е изд., 2002, 604 с.

(այսինքն՝ ամուսինները կստանան հաճույքի 0-ական միավորներ), եթե ամուսինը զնա բալետ, իսկ կինը՝ մարզադաշտ:

Նկարագրված խաղի շահումների մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը.

		Կին	
		Բալետ	Ֆուտբոլ
Ամուսին	Բալետ	(4,1)	(0,0)
	Ֆուտբոլ	(2,2)	(1,4)

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե ամուսինները հետևեն տարբեր, չհամաձայնեցված ռազմավարությունների, ապա հնարավոր շահումների բազմությունը՝ h_1 , h_2 , արժեքների կոորդինատների համակարգում կկազմի (0,0), (1,4) և (4,1) գագաթներով եռանկյունը (գծապատկեր 7.2):



Գծապատկեր 7.2

BC գիծը Պարետո-օպտիմալ լուծումների բազմությունն է. կնոջ հաճույքի ավելացումը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ նվազում է ամուսնու հաճույքի մակարդակը: T -ն՝ (2,2) կոորդինատներով, այս խաղի սպառնալիքի կետն է. կնոջ «սպառնալիքը», օրինակ, կարող է հնչել հետևյալ կերպ. «Ազատ ժամանակիս 2/3-ից ավելին, ֆուտբոլին տրամադրելու փոխարեն, լավ կլինի անցկացնել բալետ դիտելով (ամուսնու հետ կամ առանց նրա)»: Նույնկերպ, կարող է հնչել ամուսնու «սպառնալիքը»:

Այսպիսով՝ բանակցությունների բազմությունը, որն առաջացնում է սպառնալիքի T կետը, ներկայացված է DE հատվածով՝ BC լուծումների Պարետո-օպտիմալ բազմության վրա: DE հատվածում ամուսինը և կինը կարող են պայմանավորվել, թե որքան հաճախ միասին պետք է ներկա գտնվեն ժամանցի այս կամ այն վայրում:

Այդ դեպքում նրանք, փոխադարձ սպառնալիքներից խուսափելու համար, որևէ հաճույքի չպետք է տրամադրեն իրենց ազատ ժամանակի 2/3-ից ավելին:

Նեշի լուծումը, երբ առավելագույն է ամուսնու և կնոջ հաճույքների հավելաճի արտադրյալը՝ համեմատած այն հաճույքի հետ, երբ նրանք միայնակ են այցելում ֆուտբոլ և/կամ բալետ, համապատասխանում է N կետին: Այսպիսով՝ քննարկվող խնդրի լավագույն լուծումն այն է, որ ամուսինները պայմանավորվեն ազատ ժամանակի մի կեսը տրամադրել բալետին, իսկ մյուս կեսը՝ ֆուտբոլին:

7.4. ԽԱՂԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՍԻԿՐՈՏՆԵՏԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ⁹

Խաղերի տեսության մեջ կիրառվող մաթեմատիկական հասկացություններն օգտագործվում են միկրոտնտեսական, այդ թվում նաև՝ շուկայական հավասարակշռությանն առնչվող տարբեր խնդիրներ վերլուծելիս:

Ենթադրենք՝ դիտարկվում է այնպիսի տնտեսություն, որտեղ առկա է երկու սուբյեկտ՝ 1-ին խաղացող և 2-րդ խաղացող, և երկու ապրանք (բարիք)՝ x_1 և x_2 ՝ սպառվող քանակություններով (բնական է, որ խաղացողների և ապրանքների թիվը կարող է ավելին լինել, բայց 2×2 -ի դեպքում բոլոր հասկացություններն ունեն առավել ակնառու մեկնաբանություններ):

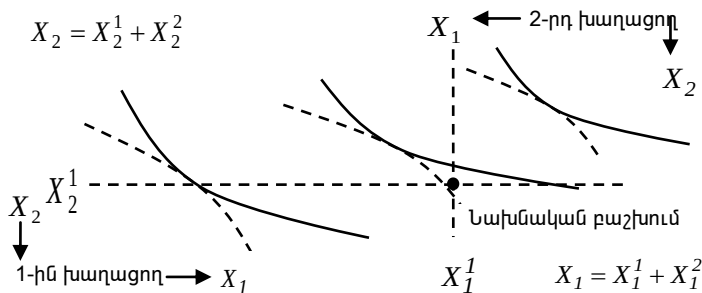
Ամեն խաղացող օժտված է օգտակարության ֆունկցիայով՝ $h_1(x_1, x_2)$, $h_2(x_1, x_2)$ ՝ ըստ որոշված ապրանքների հավաքածուների: Ենթադրվում է, որ այդ ֆունկցիաներն անընդհատ են, մոնոտոն աճող, որոշման տիրույթի բոլոր կետերում առնվազն կրկնակի ածանցելի և ուռուցիկությամբ դեպի վերև ուղղված՝ ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի: Խաղի սկզբում տնտեսությունում գոյություն ունի առաջին ապրանքի X_1 և երկրորդ ապրանքի X_2 ընդհանուր քանակություն: Ենթադրենք, որ այդ բարիքների նախնական քանակներն արդեն որևէ կերպ բաշխված են խաղացողների միջև. 1-ին խաղացողը տիրապետում է առաջին ապրանքի X_1^1 և

⁹ Мулен Э., Теория игр с примерами из математической экономики: пер. с франц., М.: "Мир", 1985, 200 с.
Микроэкономика. Поведение, институты и эволюция / Самуэль Боулз. М.: Изд-во "Дело" АНХ, 2010, 576 с.
Вэриан Х.Р., В97 Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход. М.: "ЮНИТИ", 1997, 767 с.

երկրորդ ապրանքի X_2^1 քանակության, իսկ 2-րդ խաղացողը համապատասխանաբար՝ X_1^2 և X_2^2 քանակության այնպես, որ՝ $X_1^1 + X_1^2 = X_1$ և $X_2^1 + X_2^2 = X_2$:

Բնականաբար, հարցեր են ծագում. կարո՞ղ են, արդյոք, խաղացողներն արդեն ունեցած ապրանքների փոխանակությամբ լավացնել իրենց վիճակը, այսինքն՝ մեծացնել h_1 և h_2 օգտակարության ֆունկցիաների արժեքները՝ $h_1(X_1^1, X_2^1)$ -ի և $h_2(X_1^2, X_2^2)$ -ի համեմատությամբ, ինչպիսի՞ն են լուծման հատկությունները:

Երկու խաղացողով և երկու ապրանքով տնտեսության խնդրի ակնառու ներկայացման համար ավանդաբար օգտագործվում է **Էջվորտի արկղը** կամ **դիագրամը** (գծապատկեր 7.3): Էջվորտի արկղում առաջին ապրանքին համապատասխանող հորիզոնական առանցքի երկարությունը հավասար է այդ ապրանքի X_1 ընդհանուր քանակին, իսկ ուղղահայաց առանցքի երկարությունը՝ X_2 ապրանքի ընդհանուր քանակին: Առանձնացված ուղղանկյունը երկու խաղացողի միջև առկա ապրանքների բոլոր հնարավոր բաշխումների բազմությունն է: Ստորին ձախ անկյունը համարվում է 1-ին խաղացողի, իսկ վերին աջ անկյունը՝ 2-րդ խաղացողի կողողինատների սկիզբը: Առանձնացված ուղղանկյան վրա ներկայացված է անտարբերության կորերի երկու բազմություն (շահուծի ֆունկցիայի մակարդակի կորերը), որոնք պատկանում են խաղացողներից յուրաքանչյուրին: Այդ դեպքում ապրանքների բաշխման սկզբնական կետն ունի (X_1^1, X_2^1) կողողինատները 1-ին խաղացողի հաշվարկման համակարգում (և համապատասխանաբար՝ (X_1^2, X_2^2) կողողինատները 2-րդ խաղացողի հաշվարկման համակարգում):



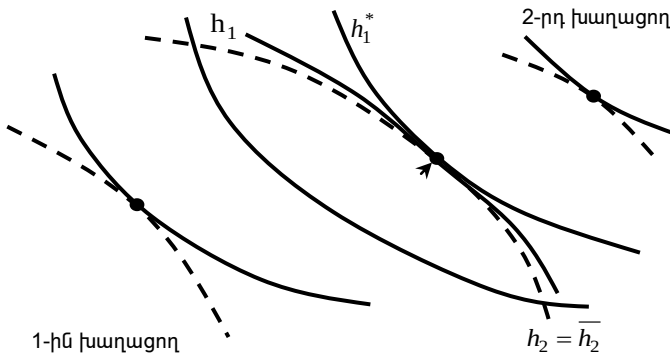
Գծապատկեր 7.3. Էջվորտի արկղը (այստեղ և հետագայում 1-ին խաղացողի համար անտարբերության կորերը ներկայացված են հոծ գծերով, իսկ 2-րդ խաղացողի համար՝ կետագծերով)

Նախ՝ դիտարկենք խաղացողների միջև ապրանքների արդյունավետ բաշխման հիմնախնդիրը: Բաշխման նկատմամբ միակ պահանջը, որը մենք կարող ենք ներկայացնել վերլուծության սկզբնական փուլում, Պորետո-օպտիմալությունն է: Հիշեցնենք, որ բաշխումը կոչվում է Պորետո-օպտիմալ, եթե խաղացողներից որևէ մեկի վիճակը հնարավոր չէ լավացնել՝ չվատացնելով մյուս խաղընկերոջ վիճակը:

Պարետո-օպտիմալ բաշխվածության բազմությունը կարելի է ակնառու կերպով ներկայացնել էջվորտի արկղի միջոցով: Երկու խաղացողի դեպքում Պարետո-օպտիմալ լուծումը կարելի է գտնել խաղացողներից մեկի օգտակարության մակարդակի ամրագրմամբ (օրինակ՝ 2-րդ խաղացողի) և որոնել մյուս խաղացողի օգտակարության ֆունկցիային առավելագույն արժեք հաղորդող կետը:

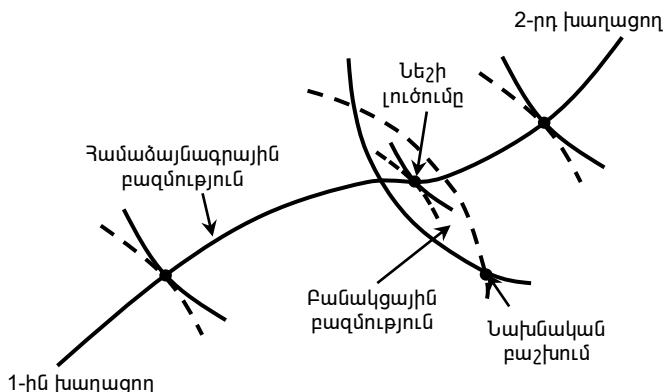
Ըստ էջվորտի արկղի եզրույթների՝ դա նշանակում է, որ անհրաժեշտ է 2-րդ խաղացողի ամրագրված անտարբերության կորի վրա գտնել այնպիսի կետ, որտեղ 1-ին խաղացողի օգտակարության ֆունկցիան հասնում է իր առավելագույն արժեքին: Ակնհայտ է, որ դա այն կետն է, որտեղ անտարբերության կորերը շոշափում են միմյանց, քանի որ այլ պարագայում 1-ին խաղացողը կարող է, առաջ շարժվելով դեպի ներս՝ 2-րդ խաղացողի մակարդակի ամրագրված կորով, մեծացնել իր օգտակարության ֆունկցիայի արժեքը (գծապատկեր 7.4):

Ապրանքների տարածության Պարետո-օպտիմալ բաշխվածությունների բազմությունը կոչվում է **համաձայնագրային**, քանի որ ընդհանուր դեպքում խաղացողների համար իմաստ ունի միմյանց հետ փոխհամաձայնության գալ հենց այդ արդյունավետ բաշխումների հավաքածուների վերաբերյալ:



Գծապատկեր 7.4. Պարետո-օպտիմալ բաշխումն էջվորտի արկղում

Դիտարկենք այնպիսի իրավիճակ, երբ ի սկզբանե ամեն խաղացող տիրապետում է յուրաքանչյուր ապրանքի որոշակի նախնական քանակի: Հարց է ծագում, թե կարող է այդ նախնական բաշխումն ավելի լավացվել խաղացողների միջև ապրանքների փոխանակմամբ: Վերլուծենք այդ իրավիճակն էջվորտի արկղի միջոցով: Դիցուք՝ (X_1^1, X_2^1) -ը ապրանքների բաշխման սկզբնական կետն է. անցկացնենք այդ կետով անցնող՝ 1-ին և 2-րդ խաղացողների անտարբերության կորերը (գծապատկեր 7.5):



Գծապատկեր 7.5. *Սպառնալիքի գծերը, համաձայնագրային և Նեշի լուծումն էջվորտի արկղի համար*

Եթե այդ երկու կորերը չեն շոշափում իրար (այսինքն՝ նախնական բաշխումը Պարետո-օպտիմալ չէ), ապա դրանց հատումով առաջանում է տիրույթ՝ դեպի ուր շարժվելով երկու խաղացողներից յուրաքանչյուրը կարող է մեծացնել իր օգտակարության ֆունկցիայի արժեքը: Այդ դեպքում համաձայնագրային բազմության (կորի) մի մասը հայտնվում է այն տիրույթում, որը ստացվել է անտարբերության կորերի միջոցով:

Ինչպես համոզվեցինք, խաղացողների համար իմաստ ունի բանակցություններ վարել այն բաշխումների վերաբերյալ, որոնք համաձայնագրային բազմությունում են, իսկ նկատի ունենալով սկզբնական բաշխումը՝ համաձայնագրային բազմության տիրույթի վերաբերյալ, որը տեղավորված է երկու անտարբերության կորերի միջև: Այդ կորերը յուրաքանչյուր խաղացողի համար ամրագրում են օգտակարության նախնական մակարդակը, համանման են կոոպերատիվ խաղերի սպառնալիքի կետին, հետևաբար՝ կոչվում են **սպառնալիքի գծեր**, իսկ համաձայնագրային բազմությունում

դրանց կողմից առանձնացված տիրույթն անվանվում է բանակցային բազմություն: Բանակցային բազմության մեջ մտնելու համար 1-ին խաղացողը պետք է փոխանցի (վաճառի) իր մոտ առկա որոշակի քանակությամբ 1-ին ապրանքից 2-րդ խաղացողին՝ 2-րդ ապրանքի որոշակի քանակության փոխարեն, որն առկա է 2-րդ խաղացողի մոտ:

Այստեղ սպառնալիքի գծերը նշանակում են, որ դրանց սահմաններից դուրս խաղացողներից ոչ մեկի համար բանակցություններ վարելն իմաստ չունի. ավելի լավ է (կամ առնվազն՝ ոչ ավելի վատ) մնալ սկզբնական բաշխման իրավիճակում: Նեշի կետը, որը համապատասխանում է խաղացողների օգուտների ավելացումների արտադրյալների առավելագույնին՝ համեմատած սկզբնական իրավիճակի հետ, գտնվում է բանակցությունների բազմությունում: Կարելի է եզրակացնել, որ խաղացողները կարող են լավացնել իրենց սկզբնական վիճակը, փոխանակելով ապրանքները, և 1-ին խաղացողին ձեռնատու է զիջել 2-րդ խաղացողին որոշակի քանակությամբ 1-ին ապրանքը՝ փոխանակելով այն 2-րդ ապրանքով:

7.5. ԴԻՐՔԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐ¹⁰

Խաղերի տեսության միջոցով դիտարկենք շուկայական վարքագծի ևս մեկ օրինակ, որն իր կառուցվածքով տարբերվում է նախորդ խնդրից:

Դիցուք՝ ունենք հետևյալ իրավիճակը. որոշակի ապրանքի շուկայում գերիշխում է մենաշնորհային արտադրողը (1-ին ֆիրմա), որին մենաշնորհ դիրքը բերում է 12 մլրդ դրամի շահույթ: Այդ հատվածում բարձր շահութաբերության մակարդակը հրապուրում է այլ արտադրողներին, և, մասնավորապես, 2-րդ ֆիրման պետք է լուծի հետևյալ խնդիրը. արդյո՞ք կառուցել սեփական գործարան և սկսել արտադրել նմանատիպ ապրանք: Սակայն, նա գիտի, որ 1-ին ֆիրման կարող է իրականացնել որոշակի գործողություններ՝ ի պատասխան այդ ներխուժման: Մյուս կողմից, 1-ին ֆիրման կարող է նվազեցնել իր արտադրության ծավալները՝ 2-րդ ֆիրմային զիջելով շուկայի մի մասը և կիսելով նրա հետ ստացված շահույթը: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր ֆիրմա կստանա 6 մլրդ դրամի շահույթ: Մյուս կողմից, 1-ին ֆիրման կարող է պահպանել իր արտադրության ծավալը: Ենթադրենք, որ այդ դեպքում 1-ին և 2-րդ ֆիրմա-

¹⁰ Крушевский А.В., Теория игр., Киев, “Вища школа”, 1977, 216 с.
Оуэн Г., Теория игр., М.: “Мир”, 1971.

ների առաջարկի համախառն աճը կնվազեցնի տվյալ ապրանքի գինը, և, որպես հետևանք, 1-ին ֆիրմայի շահույթը կնվազի՝ կազմելով 5 մլրդ դրամ: Միաժամանակ, զների իջեցումը կհանգեցնի այն բանին, որ 2-րդ ֆիրման նոր շուկա դուրս գալու նպատակով, կատարելով նախնական ծախսեր, կկրի մաքուր վնաս: Նա այդ դեպքում կկորցնի 2 մլրդ դրամ: Իսկ այն դեպքում, երբ 2-րդ ֆիրման ձեռնպահ է մնում շուկա մտնելուց, ապա ոչինչ չի շահում և վնաս չի կրում, իսկ 1-ին ֆիրման շարունակում է ստանալ 12 մլրդ դրամ մենաշնորհային շահույթ: Եթե 1-ին ֆիրման հանկարծ որոշի այդ իրավիճակում նվազեցնել իր արտադրության ծավալը, ապա նրա շահույթը կնվազի մինչև 8 մլրդ դրամ:

Վերջնականորեն ձևակերպված՝ երկու անձանց այս անհակամարտ խաղը կարող է նկարագրվել շահումների հետևյալ մատրիցով (առաջին թվերով արտացոլված են 1-ին ֆիրմայի շահումները՝ մլրդ դրամով).

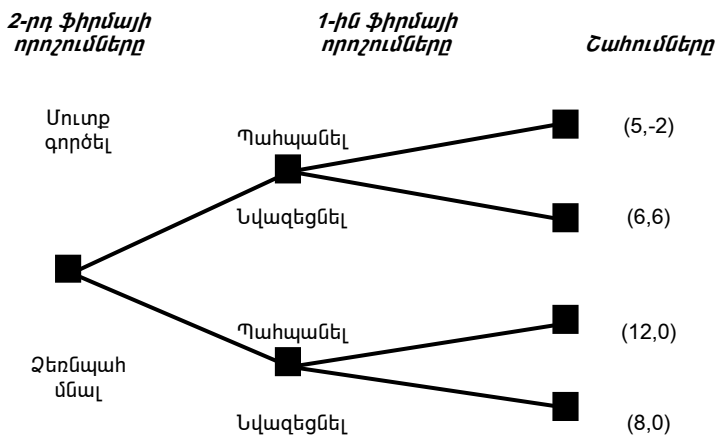
		<i>1-ին ֆիրմայի ռազ- Պահպանել արտադ- Նվազեցնել արտադ- մավարությունները րության ծավալը րության ծավալը</i>	
2-րդ ֆիրմայի ռազմավարու- թյունները	Մուտք գործել	(5,-2)	(6,6)
	Ձեռնպահ մնալ	(12,0)	(8,0)

Դժվար չէ նկատել, որ նկարագրված խաղն իր պայմաններով տարբերվում է նախկինում դիտարկվածներից, քանի որ մինչ այժմ ենթադրում էինք, որ խաղացողներն իրենց **քայլերը** կատարում են միաժամանակ՝ չիմանալով խաղընկերոջ՝ 2-րդ ֆիրմայի կատարած քայլը, ինչն էլ հիմնովին փոխում է իրավիճակը:

Այն խաղերը, որոնցում նախապես հայտնի է խաղացողների կողմից ընդունվող որոշումների հաջորդականությունը, կոչվում են **դիֆային**: Խաղացողների և քայլերի քանակը կարող է հավասար լինել 2-ի, 3-ի և այլն: Դիրքային, բազմաքայլ, երկու մասնակցով խաղերի դասին կարելի է վերագրել շախմատը և շաշկին, որտեղ խաղացողներն իրենց որոշումներն ընդունում են՝ իմանալով խաղընկերոջ բոլոր նախորդ քայլերը:

Դիրքային խաղի կառուցվածքի նշված առանձնահատկությունների պատճառով առավել հարմար կլինի այն ներկայացնել ոչ թե շահումների մատրիցի, այլ **որոշումների (լուծումների) ծառի** միջոցով, որը խաղացողներին նախնականից տեղափոխում է վերջնական դիրք: Այսպես՝ **շուկա մուտք գործելու** խաղը, որը նկարագրեցինք, կարելի է ներկայացնել հետևյալ ծառով (գծապատկեր 7.6), որի ճյուղերը համապատասխանում են խաղընկերների որո-

շումներին, իսկ ամեն գագաթի մոտ նշված են խաղացողների շահումները (առաջինը նշված է 1-ին ֆիրմայի շահույթը, մլրդ դրամ):



Գծապատկեր 7.6. Շուկա մուտք գործելու խաղի որոշումների ծառը

Խաղի ծառի գագաթները կոչվում են **դիրքեր**: Այն դիրքերը, որոնք անմիջականորեն հաջորդում են որոշակի դիրքի, կոչվում են **այլընտրանքային**: Դիրքերը, որոնք չունեն այլընտրանք, կոչվում են **վերջնական**, իսկ դեպի դրանց տանող ճանապարհները՝ **պարտիաներ** (նկարագրված խաղն ունի չորս հնարավոր պարտիա (խաղափուլ)): Որոշումների ծառի մի մասը, որը նկարագրում է խաղը՝ որոշակի դիրքից սկսած, խաղընկերների մի քանի սկզբնական քայլերից հետո կոչվում է **ենթախաղ**, և դրա որոշումները (լուծումները) կարող են ներկայացնել ինքնուրույն խնդիրներ (ենթախաղի լավ օրինակ է հետևյալ շախմատային էտյուդը. «Քամի՞ քայլով տրված դիրքից սպիտակները կարող են մատ անել սև արքային»):

8.1. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕԳՏԱԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԸ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

Ընդհանուր օգտակարության ֆունկցիան պետք է ցույց տա հասարակության, դրա տարբեր սոցիալական խմբերի նպատակներն ու շահերը՝ որոշված **նյութական և հոգևոր բոլոր բարիքների բազմության վրա**: Նշանակենք M -ով բոլոր նյութական և հոգևոր բարիքների բազմությունը: Ենթադրենք՝ ունենք n բարիք. $M = \{1, n\}$: Ըստ բարիքների բազմության՝ կարելի է որոշել սպառվող բարիքների տարբեր **հավաքածուներ**, օրինակ՝

$$X^a = \{X_1^a, X_2^a, \dots, X_i^a, \dots, X_n^a\},$$

$$X^b = \{X_1^b, X_2^b, \dots, X_i^b, \dots, X_n^b\},$$

$$X^c = \{X_1^c, X_2^c, \dots, X_i^c, \dots, X_n^c\},$$

որտեղ X_i^a -ն $(i = \overline{1, n}) X^a$ հավաքածուում i -րդ բարիքի սպառվող քանակն է: Դիտարկված բարիքների հավաքածուների միջև հնարավոր չէ իրականացնել քանակական համեմատություն: Համեմատությունները կարող են կրել միայն որակական բնույթ: Այդ համեմատությունների համար ձևակերպենք հետևյալ աքսիոմները.

1. Համեմատելիության կամ համաչափելիության աքսիոմ:

Եթե տրված են X^a և X^b հավաքածուները, ապա դրանց միջև անպայման տեղի ունի հետևյալ 3 առնչություններից միայն մեկը.

1. $X^a P X^b$ (X^a հավաքածուն նախընտրելի է X^b -ից),
2. $X^b P X^a$ (X^b հավաքածուն նախընտրելի է X^a -ից),
3. $X^a I X^b$ (X^a հավաքածուն համարժեք է X^b -ին):

2. Հիագեցվածության կամ չբավարարվածության աքսիոմ:

Դիցուք՝ տրված են X^a և $\overline{X}^a$ հավաքածուները, որոնք տարբերվում են միայն i -րդ բարիքի սպառվող քանակով.

$$X^a = \{X_1^a, X_2^a, \dots, X_i^a, \dots, X_n^a\},$$

$$\overline{X}^a = \{X_1^a, X_2^a, \dots, X_i^a + \Delta, \dots, X_n^a\}, \Delta > 0:$$

Կասենք, որ X^a հավաքածուն հագեցված չէ i -րդ բարիքի նկատմամբ, եթե $\overline{X}^a \succ X^a$: Հակառակ դեպքում, եթե X^a և $\overline{X}^a$ հավաքածուները համարժեք են, ապա տվյալ i -րդ բարիքի նկատմամբ պահանջարկը բավարարված է, հետևաբար՝ այն պետք է հեռացնել բոլոր հավաքածուներից, ուստի նաև՝ ընդհանուր օգտակարության ֆունկցիայից: Այսպիսով՝ վերլուծության են ենթարկվում միայն այն բարիքները, որոնց նկատմամբ պահանջարկը չի հասնում հագեցման:

Աքսիոմ 3. Տրանզիտիվության (տարանցիկության) աքսիոմ:

Եթե $X^a \succ X^b$ և $X^b \succ X^c$, ապա $X^a \succ X^c$: Նման կերպ, եթե $X^a \sim X^b$ և $X^b \sim X^c$, ապա $X^a \sim X^c$:

Երրորդ աքսիոմը հնարավորություն է տալիս համեմատելու անմիջականորեն անհամատեղելի X^a և X^b բարիքների հավաքածուներն իրականում գոյություն ունեցող կամ արհեստականորեն կառուցված X^b բարիքների հավաքածուի միջոցով:

Որպես կանոն, համարվում է, որ օգտակարության ֆունկցիան պետք է լինի **անընդհատ, մոնոտոն աճող, ուռուցիկությամբ դեպի վեր ուղղված** և իր որոշման տիրույթի ցանկացած կետում՝ **առնվազն կրկնակի ածանցելի**.

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} > 0, i = \overline{1, n},$$

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i^2} < 0, i = \overline{1, n},$$

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j} > 0, i \neq j:$$

Սահմանում: Բարիքների հավաքածուների բազմության վրա որոշված $U(X)$ ֆունկցիան **ընդհանուր օգտակարության (ԸՕՖ)**

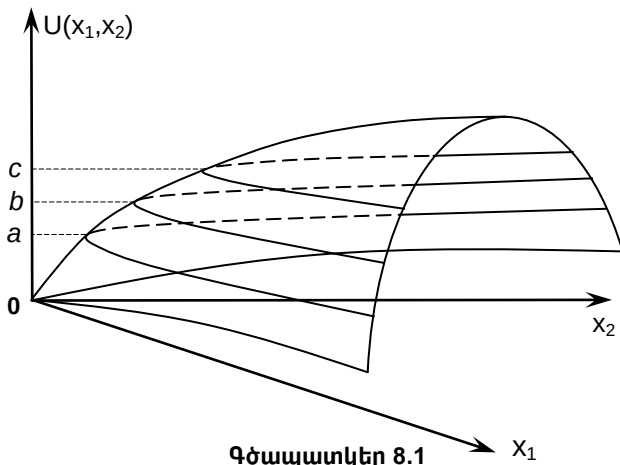
է, եթե օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1. $U(X) > U(Y)$ այն և միայն այն դեպքում, եթե XPY ,
2. $U(Y) > U(X)$ այն և միայն այն դեպքում, եթե YPX ,
3. $U(Y) = U(X)$ այն և միայն այն դեպքում, եթե XIY :

Սահմանումից երևում է, որ $U(X)$ ֆունկցիան միակը չէ: Ավելին, կարելի է ցույց տալ, որ գոյություն ունեն նշված հատկություններով օժտված անվերջ բազմության ֆունկցիաներ:

8.2. ԱՆՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՐԵՐ, ԲԱՐԻՔՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՕԳՏԱԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

Ենթադրենք՝ ունենք $U(X)$ ֆունկցիան.



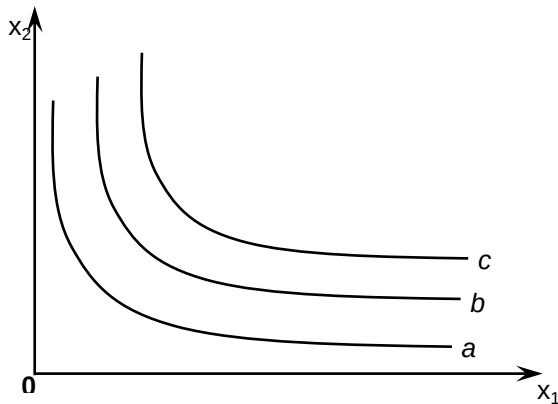
Գծապատկեր 8.1

Սահմանում: Անտարբերության կամ մակարդակի կոր է կոչվում բոլոր այն կետերի երկրաչափական տեղը, որտեղ $U(X)$ ֆունկցիան ընդունում է միևնույն հաստատուն արժեքը: Այսինքն՝ միևնույն անտարբերության կորին պատկանող բոլոր կետերին

համապատասխանող բարիքների հավաքածուները սպառողների համար ապահովում են օգտակարության միևնույն մակարդակը: Օրինակ՝ եթե դիտարկվում է ընդամենը երկու բարիքի սպառում, ապա անտարբերության կորի պրոյեկցիան X_1OX_2 հարթության վրա կունենա հետևյալ տեսքը.

Անտարբերության կորերն օժտված են հետևյալ հատկություններով (այսուհետև կնույնացնենք անտարբերության կորը և դրա պրոյեկցիան).

1. անտարբերության կորերն իրար հետ չեն հատվում,
2. որքան անտարբերության կորը հեռու է կոորդինատների սկզբնակետից, այնքան $U(X)$ ֆունկցիայի արժեքն այդ կորի վրա ավելի մեծ է:



Գծապատկեր 8.2

Սահմանում: i -րդ բարիքի սահմանային օգտակարությունը՝ (MU_{x_i}) , $U(X)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալն է՝ ըստ i -րդ բարիքի.

$$MU_{x_i} = \frac{\partial U(X)}{\partial x_i}, i = \overline{1, n} :$$

MU_{x_i} ֆունկցիան ցույց է տալիս, թե ինչ չափի փոփոխության է ենթարկվում $U(X)$ ֆունկցիան, երբ միավոր փոփոխության է ենթարկվում i -րդ բարիքի սպառվող քանակությունը:

Պարզ է, որ բարիքի սահմանային օգտակարությունը հաստատուն մեծություն չէ. այն կախված է ոչ միայն i -րդ, այլև մնացած բոլոր բարիքների սպառվող քանակներից:

8.3. ԲԱՐԻՔՆԵՐԻ ՓՈԽԱՐԻՆՄԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՆՈՐՄԱ (MRS, marginal rate of substitution)

Հաճախ անհրաժեշտ է լինում պարզել, թե բարիքներն ինչ հարաբերակցությամբ պետք է փոխարինվեն միմյանցով: Ընդունենք, որ փոխարինումը **համարժեք** է, այսինքն՝ դրանից հետո ընդհանուր օգտակարության ֆունկցիայի արժեքը նույնն է (մնում է անփոփոխ):

Համեմատենք հետևյալ երկու բարիքի հավաքածուները.

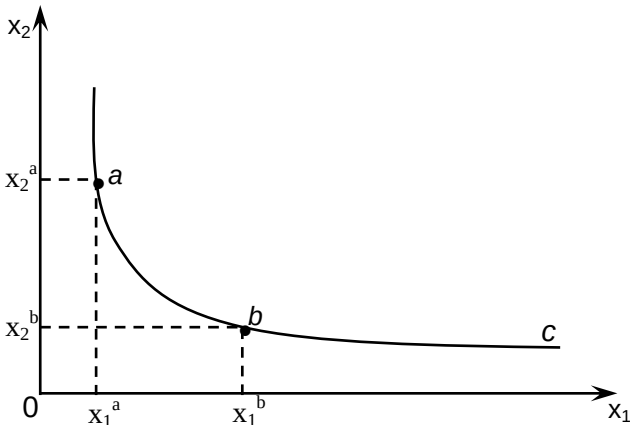
$$X^a = \{X_1^a, X_2^a, \dots, X_i^a, \dots, X_n^a\},$$

$$X^b = \{X_1^b, X_2^b, \dots, X_i^b, \dots, X_n^b\}:$$

Ենթադրենք՝ $X_k^a = X_k^b$, բացի այն դեպքերից, երբ $k=i$ և $k=j$:

Քանի որ i և j բարիքների փոխարինումը համարժեք է, ապա օգտակարության ֆունկցիայի արժեքները պետք է լինեն իրար հավասար՝ $U(X_a) = U(X_b) = \text{const}$:

Դիտարկենք $U(X)$ -ի որևէ անտարբերության կոր.



Գծապատկեր 8.3

$$a = (X_1^a, X_2^a),$$

$$b = (X_1^b, X_2^b) = (X_1^a + \Delta_1, X_2^a - \Delta_2), \quad \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0,$$

$$U(a) = c,$$

$$U(b) = c:$$

Սահմանում: $MRS_{x_1 x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1}, \quad U(X) = \text{const}:$

$MRS_{x_1 x_2}$ -ը ցույց է տալիս, թե սպառողը որքանով պետք է փոքրացնի (մեծացնի) երկրորդ բարիքի սպառումը, եթե առաջին բարիքի սպառումը մեծացվի (փոքրացվի) մեկ միավորով՝ ընդհանուր օգտակարության մակարդակի անփոփոխ մնալու պայմանով: Քանի որ $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$, ապա բացասական մշանը դրվում է $MRS_{x_1 x_2} > 0$ պայմանն ապահովելու նպատակով:

Դիտարկենք $U(X)$ ֆունկցիայի փոփոխությունն անտարբերության կորի վրա: Ըստ սահմանման՝ այն պետք է հավասար լինի 0-ի: Այսպիսով՝ $U(X)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը հավասար է 0-ի՝ $dU(X) = 0$:

$$dU(x) = \frac{\partial U(X)}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial U(X)}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial U(X)}{\partial x_n} \cdot dx_n = 0:$$

Դիտարկենք ցանկացած i և j բարիքների դեպքը՝ ($i \neq j$) .

$$dU(x_i, x_j) = \frac{\partial U(X)}{\partial x_i} \cdot dx_i + \frac{\partial U(X)}{\partial x_j} \cdot dx_j = 0, \quad i \neq j:$$

Ըստ i -րդ բարիքի օգտակարության սահմանման՝

$$MU_{x_i} \cdot dx_i + MU_{x_j} \cdot dx_j = 0,$$

$$MU_{x_i} \cdot dx_i = -MU_{x_j} \cdot dx_j,$$

կամ

$$\frac{MU_{x_i}}{MU_{x_j}} = \frac{dx_j}{dx_i}, \quad i \neq j$$

$$MRS_{x_i x_j} = \frac{MU_{x_i}}{MU_{x_j}} :$$

Ստացված բանաձևի տնտեսագիտական իմաստն այն է, որ մեծ օգտակարությամբ բարիքի փոքր քանակությունը համարժեք է փոքր օգտակարությամբ բարիքի մեծ քանակությանը:

8.4. ՄՊԱՌՈՂԻ ՈԱՑԻՈՆԱԼ ՎԱՐՔԱԳԻԾԸ

Եթե որպես բարիքներ դիտարկվում են միայն սպառման ոլորտում օգտագործվող նյութական բարիքները և ծառայությունները, ապա այդպիսի ԸՕՖ-ն ընդունված է անվանել **սպառման նպատակային ֆունկցիա**:

Դիտարկենք **սպառողի ռացիոնալ վարքագծի** հետևյալ խնդիրը.

$$U(X) \rightarrow \max, \quad (8.1)$$

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i \leq I, \quad (8.2)$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n}: \quad (8.3)$$

որտեղ P_i -ն i -րդ բարիքի գինն է, $i = \overline{1, n}$,

I -ը՝ սպառողի եկամուտը,

x_i -ն՝ i -րդ բարիքի սպառվող քանակությունը, $i = \overline{1, n}$:

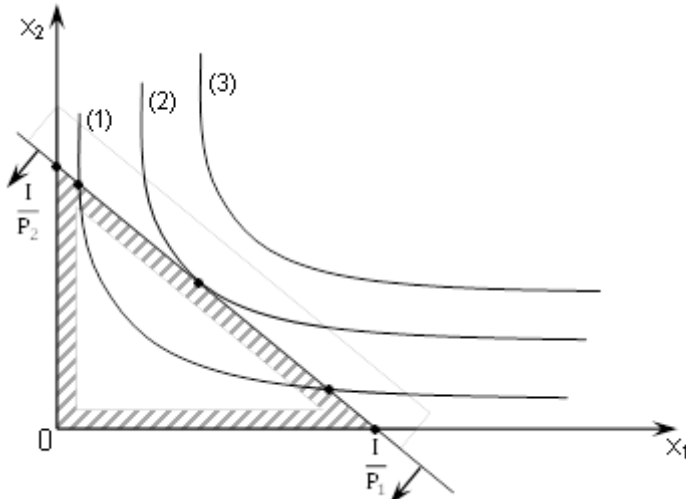
Սպառողի **ռացիոնալ** (խելամիտ) ընտրության խնդրի էությունն ապրանքների ու ծառայությունների այնպիսի քանակությունների ընտրության մեջ է, որ սպառողը կարող է ձեռք բերել գների տրված մակարդակի և առկա անձնական եկամտի պայմաններում՝ առավելագույնի հասցնելով **սպառման նպատակային ֆունկցիայի արժեքը**:

Դիտարկենք սպառման խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը երկու բարիքի դեպքում.

$$U(x_1, x_2) \rightarrow \max, \quad (8.4)$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 \leq I, \quad (8.5)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0: \quad (8.6)$$



Գծապատկեր 8.4

Բյուջետային սահմանափակման գծից ներքև գտնվող կամայական կետը (բարիքների հավաքածու) սպառողի համար հասանելի է, իսկ հատվածից վերև գտնվող ոչ մի կետ հասանելի չէ: Գծենք երեք անտարբերության կորեր, որոնցից (1)-ը հատվում է $P_1 X_1 + P_2 X_2 = I$ բյուջետային գծի հետ երկու կետում, (2)-ը շոշափում է (հատում է մեկ կետում), իսկ (3)-ը չի հատվում՝ գտնվում է բյուջետային գծից վերև: (3) անտարբերության կորի վրա գտնվող կետերը չեն կարող հանդիսանալ լավագույն լուծում՝ բավարար բյուջեի բացակայության պատճառով: Թեև բյուջետային գծի և (1) անտարբերության կորի հետ հատման կետերը պատկանում են բյուջետային գծին, այնուամենայնիվ, դրանք գտնվում են այն անտարբերության կորի վրա, որն առավել մոտ է սկզբնակետին, ինչը նշանակում է, որ բյուջետային գծի և շոշափման կետը պարունակող անտարբերության կորի հատման կետում $U(X)$ ֆունկցիայի արժեքն առավել մեծ է՝ համաձայն անտարբերության կորերի 2-րդ հատկության: Այսպիսով՝ լավագույն լուծումը գտնվում է այն ան-

տարբերության կորի վրա, որը շոշափում է բյուջետային սահմանափակումը:

Դիտարկենք խնդրի լուծումը n բարիքների դեպքում: Ընդհանուր առմամբ, (8.1)–(8.3) խնդիրը ՈԳԾԽ է, հետևաբար՝ այն լուծելու համար կիրառենք Լագրանժի մեթոդը՝ պայմանական էքստրեմումի խնդիրը հանգեցնելով ոչ պայմանական էքստրեմումի խնդրի: Կազմենք (8.1)–(8.3) խնդրին համապատասխան Լագրանժի ֆունկցիան.

$$L(X, \lambda) = U(X) + \lambda \left(I - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right) \rightarrow \max, \quad (8.1')$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \lambda \geq 0: \quad (8.2')$$

Ստացված (8.1')–(8.2') խնդիրը ՈԳԾԽ է, որի լուծումն իրականացվում է Կուն-Թակերի օպտիմալության անհրաժեշտ պայմանների միջոցով, որոնք այս դեպքում կլինեն նաև բավարար պայմաններ, քանի որ **օպտիմալ լուծումը միակն է**¹¹: Կազմենք (8.1')–(8.2') խնդրին համապատասխանող՝ Կուն-Թակերի օպտիմալության պայմաններն ըստ x_i փոփոխականների.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \frac{\partial L(X, \lambda)}{\partial x_i} \leq 0 \\ 2. \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = 0 \quad \text{կամ, որ նույնն է՝} \\ 3. x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \frac{\partial U(X)}{\partial x_i} - \lambda p_i \leq 0 \\ 2. \left(\frac{\partial U(X)}{\partial x_i} - \lambda p_i \right) x_i = 0: \\ 3. x_i \geq 0, i = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

Լավագույն լուծման դեպքում՝ $x_i^* > 0, i = \overline{1, n}$ (այսինքն՝ i – որ բարիքից սպառվում է), հետևաբար, որպեսզի 2-րդ պայմանը տեղի ունենա, պետք է, որ $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, այսինքն՝ 1-ին պայմանը հանդիսա-

նա կոչոտ սահմանափակում՝ $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0$: Նկատենք, որ առա-

¹¹ Օպտիմալ լուծումը միակն է, քանի որ համակարգում սահմանափակումների թիվը հավասար է անհայտների թվին:

ջին գումարելին i -րդ բարիքի սահմանային օգտակարությունն է՝

$$MU_{x_i} = \frac{\partial U(X)}{\partial x_i}, \text{ հետևաբար՝ կստանանք.}$$

$$MU_{x_i} - \lambda p_i = 0 \Rightarrow MU_{x_i} = \lambda p_i \text{ կամ } \lambda = \frac{MU_{x_i}}{p_i}, \text{ երբ } x_i^* > 0: \quad (8.7)$$

Ստացվածի տնտեսագիտական մեկնաբանությունը հետևյալն է. յուրաքանչյուր ձեռք բերվող բարիքի օգտակարությունը օպտիմալ լուծման դեպքում պետք է ուղիղ համեմատական լինի այդ բարիքի միավորի գնին, կամ, այլ կերպ ասած, եկամուտը լավագույն ձևով ծախսելու դեպքում սպառողը յուրաքանչյուր բարիքից պետք է ձեռք բերի այնպիսի քանակությամբ, որ այդ քանակության օգտակարության և միավորի գնի հարաբերությունը բոլոր ձեռք բերվող բարիքների համար հավասար լինի միևնույն թվին (տվյալ դեպքում՝ λ -ին):

Այժմ դիտարկենք (8.1')–(8.2') խնդրի օպտիմալության պայմաններն ըստ λ փոփոխականի.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4. \frac{\partial L(X, \lambda)}{\partial \lambda} \geq 0 \\ 5. \frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda = 0 \\ 6. \lambda \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{կամ, որ նույնն է՝} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4. I - \sum_{i=1}^n p_i x_i \geq 0 \\ 5. \left(I - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right) \lambda = 0: \\ 6. \lambda \geq 0 \end{array} \right.$$

Քանի որ լավագույն լուծման դեպքում տեղի ունի (8.7) պայմանը, ուստի $\lambda^* > 0$, հետևաբար, որպեսզի 5-րդ պայմանը տեղի ունենա, պետք է, որ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, այսինքն՝ 4-րդ պայմանը դառնա

կոշտ՝ $I - \sum_{i=1}^n p_i x_i = 0$ կամ $\sum_{i=1}^n p_i x_i = I$: Այսինքն՝ օպտիմալ լուծման դեպքում **ամբողջ եկամուտը պետք է ծախսվի:**

Այսպիսով՝ Կուն-Թակերի 1-6 պայմանները համագեցրին հետևյալ համակարգին.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U(X)}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0 \\ I - \sum_{i=1}^n p_i x_i = 0 \end{array} \right. :$$

Համակարգն ունի միակ լուծում, որը (8.1)–(8.3) սկզբնական խնդրի լավագույն լուծումն է:

Պարզվում է, որ եկամտի ցածր լինելը ստիպում է սպառողին, որ նա ստացած եկամուտը ծախսի ոչ առավելագույն օգտակարությամբ: Այլ կերպ ասած, եկամտի ցածր մակարդակն աղավաղում է սպառողի օպտիմալ վարքագիծը՝ մղելով նրան դեպի ավելի էժան բարիքների ձեռքբերմանը:

Առաձգականությունը (էլաստիկությունը, ծկունությունը կամ **զգայունությունը**) տնտեսագիտական կարևորագույն հասկացություններից է: Այն ներկայացնում է մի մեծություն, որը ցույց է տալիս, թե որքան է տնտեսական մեկ ցուցանիշի 1% հարաբերական փոփոխությունն ազդում մյուսի վրա: Այն սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y} / \frac{\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}: \quad (9.1)$$

Հարկ է նշել, որ առաձգականությունը մեծություն է, որի արժեքը կախված չէ այն բանից, թե ինչ միավորներով են չափվում y և x տնտեսական մեծությունները: Մաթեմատիկորեն այն սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$E_{ax}(by) = E_x(y),$$

$$E_{ax}(by) = \frac{d(by)}{d(ax)} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{b(dy)}{a(dx)} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = E_x(y): \quad (9.2)$$

Հակադարձ ֆունկցիաների առաձգականությունները հակադարձ մեծություններ են.

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)} \leftarrow E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)}: \quad (9.3)$$

Օրինակ՝ պահանջարկի առաձգականությունն ըստ գնի հանդիսանում է ըստ պահանջարկի գնի առաձգականության հակադարձ մեծություն. $\left(E_p(Q) = \frac{1}{E_Q(p)} \right):$

Երկու՝ $u(x) \cdot v(x)$ միևնույն x գործոնից կախված ֆունկցիաների արտադրյալի առաձգականությունը հավասար է դրանց առաձգականությունների գումարին.

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), \quad (9.4)$$

$$E_x(uv) = \frac{d(uv)}{dx} \cdot \frac{x}{uv} = \frac{v \left[\frac{du}{dx} \right] + u \left[\frac{dv}{dx} \right]}{uv} \cdot x = \frac{du}{dx} \cdot \frac{x}{u} + \frac{dv}{dx} \cdot \frac{x}{v} = E_x(u) + E_x(v):$$

Երկու՝ $u(x)$ և $v(x)$ միևնույն x անկախ փոփոխականից կախված ֆունկցիաների հարաբերության առաձգականությունը հավասար է դրանց առաձգականությունների տարբերությանը.

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{d\frac{u}{v}}{dx} \cdot \frac{x}{u/v} = \frac{vdu - u dv}{v^2} \cdot \frac{xv}{u} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{x}{u} - \frac{dv}{dx} \cdot \frac{x}{v} = E_x(u) - E_x(v): \quad (9.5)$$

Երկու ֆունկցիաների գումարի առաձգականությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$E_x(u+v) = \frac{d(u+v)}{dx} \cdot \frac{x}{u+v} = \left[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \right] \cdot \frac{x}{u+v} = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u+v}: \quad (9.6)$$

9.1. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

• Աստիճանային $y = x^a$ ֆունկցիայի առաձգականությունը հաստատուն է և հավասար է a -ի.

$$E_x(x^a) = a,$$

$$E_x(x^a) = \frac{dx^a}{dx} \cdot \frac{x}{x^a} = \frac{ax^{a-1} \cdot x}{x^a} = a: \quad (9.7)$$

• Ցուցչային $y = a^x$ ֆունկցիայի առաձգականությունը համեմատական է x -ին.

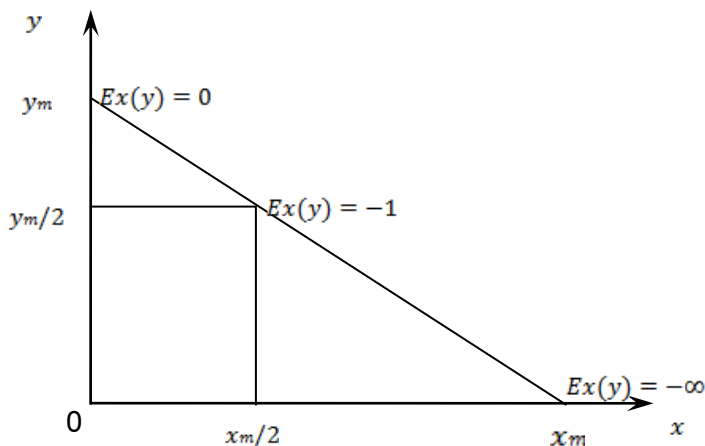
$$E_x(a^x) = x \ln a,$$

$$E_x(a^x) = \frac{da^x}{dx} \cdot \frac{x}{a^x} = a^x \cdot x \cdot \frac{\ln a}{a^x} = x \cdot \ln a: \quad (9.8)$$

- Գծային ֆունկցիաների առաձգականությունը՝ $y = ax + b$.

$$E_x(ax + b) = \frac{ax}{ax + b},$$

$$E_x(ax + b) = \frac{d(ax + b)}{dx} \cdot \frac{x}{ax + b} = \frac{ax}{ax + b}: \quad (9.9)$$



Գծապատկեր 9.1

Գծապատկեր 9.1-ում պատկերված է գծային ֆունկցիայի առաձգականությունը զրաֆիկորեն. եթե գծային ֆունկցիան նվազող է ($a < 0$), ապա դրա առաձգականությունը փոխվում է զրոյից՝ y_m կետում, մինչև մինուս անսահմանություն՝ x_m -ում՝ տվյալ հատվածի միջնակետում ընդունելով (-1) արժեքը: Այսպիսով՝ թեպետ ուղիղն ունի հաստատուն թեքություն, դրա առաձգականությունը կախված է նաև այն հանգամանքից, թե որ կետում ենք այն դիտարկում: Բոլոր կետերում անսահմանափակ առաձգականություն ունեցող ֆունկցիան կոչվում է **բացարձակ առաձգական**, և ընդհակառակը, եթե բոլոր կետերում առաձգականությունը զրոյական է՝ **բացարձակ ոչ առաձգական**:

9.2. ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍԱԿՆԵՐԸ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ենթադրենք՝ $q_i(p, I)$ -ն սպառողի մարշալյան պահանջարկի ֆունկցիան է, որտեղ q_i -ն բարիքի քանակն է, p_j -ն p գների վեկտորի j -րդ բաղադրիչն է, I -ն՝ եկամուտը:

• **Պահանջարկի գնային առաձգականությունը** կամ **պահանջարկի առաձգականությունն ըստ գնի**.

$$E_{pj}(q_i) = \epsilon_{ij} = \frac{\partial q_i(p, I)}{\partial p_j} \frac{p_j}{q_i(p, I)} : \quad (9.10)$$

Երբ $j=i$, ապա դա ցույց է տալիս որևէ բարիքի պահանջարկի հարաբերական փոփոխությունը (արտահայտված տոկոսներով) գնի մեկ տոկոս փոփոխության դեպքում և բնութագրում է սպառողի զգայունությունը տվյալ փոփոխության նկատմամբ: Երբ $j \neq i$, ապա կունենանք **պահանջարկի խաչաձև գնային առաձգականություն**. այն ցույց է տալիս որևէ բարիքի պահանջարկի հարաբերական փոփոխությունը՝ կախված փոխարինող կամ փոխլրացնող մեկ այլ բարիքի գնի մեկ տոկոս փոփոխությունից: Պահանջարկի գնային խաչաձև առաձգականության դրական լինելը վկայում է բարիքների **փոխարինելիության**, իսկ բացասականը նշանը՝ **փոխլրացնող** լինելու մասին:

Եթե պահանջարկի գնային առաձգականությունը բացարձակ մեծությամբ մեծ է մեկից, ապա պահանջարկը կոչվում է **առաձգական**, և **բացարձակ առաձգական**, երբ առաձգականության մեծությունն անսահմանափակ մեծ է: Եթե պահանջարկի գնային առաձգականությունը բացարձակ արժեքով փոքր է մեկից, ապա այն կոչվում է **ոչ առաձգական**, և **բացարձակ ոչ առաձգական**՝ զրոյական առաձգականության դեպքում:

Եվ, վերջապես, երբ պահանջարկի գնային առաձգականությունը բացարձակ արժեքով հավասար է մեկի, ապա ասում են, որ առաջարկը **միավոր առաձգական** է:

• **Պահանջարկի առաձգականությունն ըստ եկամտի**.

$$E_I(q) = \eta_i = \frac{\partial q_i(p, I)}{\partial I} \frac{I}{q_i(p, I)} : \quad (9.11)$$

Այն բնորոշում է տվյալ բարիքի պահանջարկի հարաբերական՝ տոկոսային փոփոխությունը սպառողների եկամտի մեկ տոկոս փոփոխության դեպքում: Պահանջարկի դրական եկամտային առաձգականությունը բնորոշ է **նորմալ** (որակյալ) **ապրանքներին**, իսկ բացասական մեծությունը՝ **ցածրարժեք ապրանքներին**:

Այսպես՝ ճյուղում պահանջարկի եկամտային էլաստիկության բարձր դրական գործակիցը վկայում է այն մասին, որ տնտեսական աճում դրա ներդրումն ավելին է, քան տնտեսական կառուցվածքում դրա մասնաբաժինը, և այն հնարավորություն ունի հետագայում ընդլայնվելու: Եվ ընդհակառակը. եթե տվյալ ճյուղի արտադրանքի նկատմամբ պահանջարկի եկամտային առաձգականության գործակիցը փոքր է կամ բացասական, ապա տվյալ ճյուղում կարելի է սպասել լճացման և արտադրության հետագա անկման: Ենթադրենք՝ պահանջարկը ձևավորվում է սպառողի ռացիոնալ վարքագծի օպտիմալացմամբ, այսինքն՝ ապահովված է բյուջետային հաշվեկշռվածության պայմանը, այն է՝ $I = \sum_{i=1}^n p_i q_i(p, I)$, և նշանակենք.

$$s_i = \frac{p_i q_i(p, I)}{I}, \text{ որտեղ } s_i \geq 0 \text{ և } \sum_{i=1}^n s_i = 1: \quad (9.12)$$

Այստեղ S_i -ին ցույց է տալիս եկամտի այն մասնաբաժինը, որը ծախսվել է i -րդ ապրանքի զննման համար, և հետևաբար՝ պետք է լինեն ոչ բացասական մեծություններ, որոնց գումարը հավասար է 1-ի: Հաշվի առնելով վերոնշյալը՝ կարելի է ձևակերպել հետևյալ պնդումը. եթե $q_i(p, I)$ -ն բարիքի նկատմամբ պահանջարկի ֆունկցիան է, և տեղի ունեն (9.11) ու (9.12) սահմանումները, ապա տեղի ունի հետևյալը.

$$1. \text{ Էնգելի ագրեգացում. } \sum_{i=1}^n s_i \eta_i = 1,$$

$$2. \text{ Կուռնոյի ագրեգացում. } \sum_{i=1}^n s_i \epsilon_{ij} = -s_j, \quad j = 1, \dots, n:$$

Արտադրության մեջ առաձգականության հասկացության կիրառությունները բազմապիսի են. ենթադրենք՝ $q=q(x)$, որտեղ q -ն թողարկման մակարդակն է, x -ը արտադրության ծախքերի վեկտորն է: **Արտադրության**, այսինքն՝ թողարկման առաձգականություն, ըստ որևէ a պարամետրի, կկոչվի այն մեծությունը, որը ցույց է տալիս թողարկման հատույցի փոփոխությունն արտադրության ծախքերի ծավալի փոփոխության հետևանքով.

$$E_x(q) = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{a}{q(ax)} \frac{\partial q(ax)}{\partial a} = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\partial \ln(q(ax))}{\partial \ln(a)} : \quad (9.13)$$

Այն կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ կերպ,

$$E_x(q) = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{a}{q(ax)} \frac{\partial q(ax)}{\partial a} = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{a}{q(ax)} \sum_{j=1}^n \frac{\partial q(x)}{\partial (ax_j)} x_j : \quad (9.14)$$

Արտադրության առաձգականությունն ըստ արտադրության j -րդ գործոնի սահմանենք հետևյալ կերպ՝ $E_{x_j}(q) = \frac{x_j}{q(x)} \frac{\partial q(x)}{\partial x_j}$,

եկներով այս հանգամանքից, որ (9.13) արտահայտությունը կարող է ձևափոխվել.

$$E_x(q) = \sum_{j=1}^n E_{x_j}(q) :$$

Ռեսուրսների գնային առաձգականությունը բնորոշում է որևէ ռեսուրսի (օրինակ՝ աշխատուժի) պահանջարկի հարաբերական փոփոխությունը դրա գնի մեկ տոկոս փոփոխության դեպքում.

$$E_{p_i}(x_i) = \left[\frac{dx_i}{x_i} \right] / \left[\frac{dp_i}{p_i} \right] = \frac{dx_i}{dp_i} \cdot \frac{p_i}{x_i} : \quad (9.15)$$

Արտադրության տեսության մեջ կիրառվող կարևոր հասկացություններից է **ռեսուրսների փոխարինման առաձգականությունը**, որը ցույց է տալիս, թե որքանով կարելի է փոխարինել մեկ ռեսուրսը մյուսով՝ պայմանով, որ արտադրության մնացած բոլոր գործոններն անփոփոխ են: Այն արտահայտվում է (9.16) բանաձևով, որը բնորոշում է մեկ ռեսուրսի (օրինակ՝ կապիտալի) մեծության անհրաժեշտ փոփոխությունը մեկ այլ ռեսուրսի (օրինակ՝ աշխատանքի) մեկ տոկոս քանակական փոփոխության դեպքում՝ պայմանով, որ թողարկման մակարդակն անփոփոխ է.

$$E_{x_j, x_k}(q) = - \frac{d \ln \left(\frac{x_j}{x_k} \right)}{d \ln \left(\frac{\frac{dq(x)}{dx_j}}{\frac{dq(x)}{dx_k}} \right)} : \quad (9.16)$$

ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ ԵՎ ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՆՆԵՐ

Արտադրության տեսությունն ուսումնասիրում է կապը օգտագործվող արտադրական գործոնների և թողարկվող արտադրանքի ծավալի միջև: Որոշակի ժամանակահատվածում արտադրության գործոնների (X)՝ արտադրանքի (Y) փոխակերպման գործընթացն ընդունված է անվանել **արտադրաեղանակ կամ տեխնոլոգիական եղանակ**՝ (X, Y) , որտեղ X -ն օգտագործված արտադրական գործոնների, Y -ը թողարկվող արտադրանքի վեկտորն է:

Արտադրության մոդելները ենթադրում են ինչպես օգտագործվող արտադրական գործոնների, թողարկվող արտադրատեսակների, այնպես էլ հնարավոր տեխնոլոգիական եղանակների մեծ ընտրություն: Բոլոր հնարավոր տեխնոլոգիական եղանակների բազմությունը կոչվում է **տեխնոլոգիական** բազմություն (նշանակենք Z -ով):

Գոյություն ունեցող բազմաթիվ տեխնոլոգիական եղանակներից արտադրողները, անշուշտ, ընտրում են ամենից արդյունավետները, այսինքն՝ այնպիսիք, որ արտադրության գործոնների տրված քանակության դեպքում կարող են ապահովել թողարկվող արդյունքի առավելագույն քանակություն:

Սահմանում: (X, Y) տեխնոլոգիական եղանակը կկոչվի ավելի արդյունավետ, քան (X', Y') -ը, եթե $X' \geq X, Y' \leq Y$:

Սահմանում: $(X^*, Y^*) \in Z$ արտադրական եղանակը կկոչվի արդյունավետ Z տեխնոլոգիական բազմությունում, եթե ցանկացած $(X, Y) \in Z$ և $X \leq X^*, Y \geq Y^*$, հետևում է, որ $(X, Y) = (X^*, Y^*)$, այսինքն՝ Z -ը չի պարունակում ավելի արդյունավետ տեխնոլոգիական եղանակ:

Արտադրական ֆունկցիան տեխնոլոգիական բազմությունների կիրառման ընդհանուր եղանակի մասնավոր դեպք է, երբ թողարկվող արդյունքն ագրեգացված է մեկ տեսակի արտադրանքում, և բացառված են բոլոր հնարավոր, ոչ արդյունավետ տեխնոլոգիական եղանակները: Այսինքն՝ արտադրական ֆունկցիան բնութագրում է միայն ռեսուրսների տեխնոլոգիապես արդյունավետ կոմբի-

նացիաներն արտադրանքի առավելագույն ծավալ թողարկելու համար: Արտադրական տեխնոլոգիաների ամեն մի կատարելագործում ձևավորում է նոր արտադրական ֆունկցիա: Այլ կերպ ասած, **արտադրական ֆունկցիան արտադրանքի հնարավոր առավելագույն քանակի և այդ արտադրանքի ստեղծման համար անհրաժեշտ ներդրանքի կապն է:**

Արտադրական ֆունկցիան հնարավորություն է տալիս որոշելու ինչպես արտադրանքի առավելագույն քանակությունը, որը կարող է արտադրվել գործոնների տրված կոմբինացիայի դեպքում, այնպես էլ գործոնների այն կոմբինացիաները, որոնք ապահովում են թողարկման միևնույն ծավալը:

«Արտադրության արդյունք» և «ռեսուրսներ» հասկացությունները կարող են հատկորոշվել՝ կախված ուսումնասիրվող արտադրական միավորի բնույթից, հետազոտության նպատակից, առկա տեղեկատվությունից և այլն: Արտադրության արդյունքը կարող է չափվել բնահրային կամ արժեքային միավորներով, փաստացի կամ պոտենցիալ մեծություններով:

Դիտարկենք արտադրական համակարգ, որը T ժամանակի ընթացքում $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ գործոնների հավաքածուն փոխակերպում է Y արտադրանքի: Արտադրական ֆունկցիան մաթեմատիկական կախվածություն է թողարկված Y արտադրանքի մաքսիմալ քանակության և արտադրության մեջ ծախսված գործոնների $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ հավաքածուի միջև: Արտադրական ֆունկցիան գրի են առնում հետևյալ տեսքով.

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k),$$

որտեղ Y -ը թողարկման ծավալն է, x_i -ն i -րդ արտադրական գործոնի քանակն է:

Հաճախ արտադրական վերլուծությունների ժամանակ կիրառվում են երկգործոն արտադրական ֆունկցիաներ, երբ թողարկվող արտադրանքի քանակությունը կապվում է **աշխատուժ** և **կապիտալ** գործոնների ծախսերի հետ.

$$Y = f(L, K):$$

10.1. ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Արտադրական ֆունկցիաները համարվում են նորդասական, եթե բավարարում են հետևյալ չորս պայմանները.

1. $f(x_1, x_2, x_3 \dots x_k) = 0$, , երբ $x_i = 0$, $\forall i \in [1:k]$ այսինքն՝ արտադրական գործոններից առնվազն մեկի բացակայության դեպքում թողարկումը զրոյական է: Սա նշանակում է, որ արտադրական գործոնների լրիվ փոխարինումն անհնար է:

Երկու գործոնի դեպքում նշված հատկությունը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$f(L, 0) = 0, f(0, K) = 0:$$

2. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0$, $\forall i \in [1:k]$, այսինքն՝ արտադրական գործոնների

քանակության ավելացման դեպքում թողարկվող արտադրանքի քանակությունն աճում է:

3. $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} < 0$, $\forall i \in [1:k]$: Այս հատկությունը կապված է ար-

տադրական ֆունկցիայի խիստ գոգավորության հետ: Վերջինը մաթեմատիկորեն արտահայտում է արտադրական գործոնների սահմանային արդյունավետության նվազման օրենքը, այսինքն՝ արտադրական գործոններից որևէ մեկի ավելացումը մյուսների անփոփոխ մնալու պայմաններում հանգեցնում է այդ գործոնի արդյունավետության նվազմանը:

Կապիտալ-աշխատուժ գործոնների դեպքում պայմանը կունենա հետևյալ տեսքը՝ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial K^2} < 0$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial L^2} < 0$: Այսինքն՝ աշխատուժի

կամ կապիտալի ավելացմանը զուգահեռ, դրանց՝ արտադրանքի վերածվելու հնարավորությունը փոքրանում է:

4. $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3 \dots \lambda x_k) = \lambda f(x_1, x_2, x_3 \dots x_k)$: Սա նշանակում է, որ արտադրական ֆունկցիան օժտված է գծորեն համասեռության հատկությամբ, որի էությունն այն է, որ արտադրական գործոնների համամասնական փոփոխության դեպքում (λ անգամ), թողարկվող արտադրանքի քանակությունը ևս կփոխվի λ անգամ:

Կապիտալ-աշխատուժ գործոնների պարագայում պայմանը կունենա հետևյալ տեսքը՝ $f(\lambda L, \lambda K) = \lambda f(L, K)$: Գծորեն համասեռության պայմանը հնարավորություն է տալիս երկու գործոն-

ներով արտադրական ֆունկցիան ներկայացնելու մեկ գործոնից կախված ֆունկցիայով: Ունենք՝

$$Y = f(L, K) = f\left(L * 1, L * \left(\frac{K}{L}\right)\right) = Lf\left(1, \left(\frac{K}{L}\right)\right),$$

այստեղից էլ՝

$$\frac{Y}{L} = f\left(1, \left(\frac{K}{L}\right)\right):$$

Նշանակենք՝ $\frac{K}{L} = k$ և $\frac{Y}{L} = y$: Առաջին հարաբերությունը կա-

պիտալատարությունն է, իսկ երկրորդը՝ աշխատանքի արտադրողականությունը: $Y = f(k)$ -ն կոչվում է **մոդիֆիկացված (ծևափոխված) արտադրական ֆունկցիա**:

10.2. ԱՐՏԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆԱՎԵՏՈՒԹՅՈՒՆ: ՄԻՋԻՆ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔ

Արտադրական գործընթացի կամ արտադրական գործոնների օգտագործման արդյունավետությունը մաթեմատիկորեն արտահայտվում է **միջին և սահմանային արդյունքներով**: Տրված արտադրական գործոնների և ժամանակի միավորի ընթացքում ավելի արդյունավետ արտադրական համակարգերում ակնհայտ է, որ թողարկվում է ավելի մեծ քանակությամբ արտադրանք:

Սահմանում: i -րդ գործոնի միջին արդյունքը կամ միջին արդյունավետությունը որոշակի ժամանակահատվածում թողարկված արտադրանքի քանակության հարաբերությունն է i -րդ գործոնի քանակությանը.

$$A_{Y_{xi}} = \frac{Y}{x_i} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{x_i}, \quad i \in [1:k]:$$

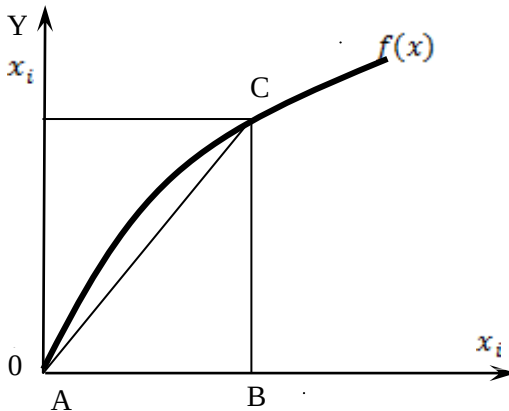
Կապիտալ և աշխատուժ գործոնների միջին արդյունքներն ընդունված է անվանել համապատասխանաբար՝ **միջին կապիտալահատույց** և **աշխատանքի միջին արտադրողականություն**.

$$A_{Y_K} = \frac{Y}{K} = \frac{f(K, L)}{K}, \quad A_{Y_L} = \frac{Y}{L} = \frac{f(K, L)}{L}:$$

Գծապատկեր 10.1-ում թողարկված արտադրանքի քանակությունն արտահայտում է ABC ուղղանկյուն եռանկյան BC կողմը, իսկ

ծախսված x_i արտադրական գործոնի քանակությունը՝ AB կողմը: Այսպիսով՝ x_i գործոնի միջին արդյունքը գրաֆիկորեն մեկնաբանվում է որպես ABC ուղղանկյուն եռանկյան էջերի հարաբերություն՝ CB/AB:

Նկատենք, որ արտադրական ֆունկցիայի զոգավորության հետևանքով i -րդ արտադրական գործոնի ավելացումը հանգեցնում է համապատասխան գործոնի միջին արդյունքի նվազմանը:



Փծապատկեր 10.1. x_i գործոնի միջին արդյունքի գրաֆիկական մեկնաբանությունը

Սահմանում: i -րդ գործոնի սահմանային արդյունքը կամ սահմանային արդյունավետությունը որոշակի ժամանակահատվածում i -րդ գործոնի լրացուցիչ միավորի հաշվին թողարկված արտադրանքի լրացուցիչ քանակությունն է:

Սաթեմատիկորեն i -րդ գործոնի սահմանային արդյունքը $Y = f(x)$ արտադրական ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալն է՝ ըստ i -րդ գործոնի.

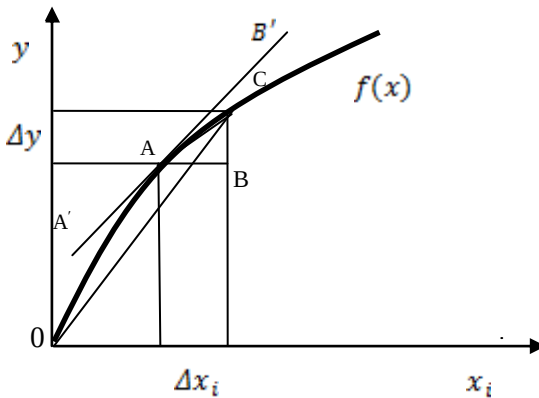
$$M_{Yx_i} = \frac{\partial Y}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_i}:$$

Կապիտալի սահմանային արդյունքը (սահմանային կապիտալահատույցը) և աշխատուժի սահմանային արդյունքը (աշխատանքի սահմանային արտադրողականությունը) համապատասխանաբար՝ ներկայացվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$M_{y_K} = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial f(K, L)}{\partial K}, \quad M_{y_L} = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial f(K, L)}{\partial L}:$$

Նկատենք, որ արտադրական գործոնի **սահմանային արդյունքն ավելի փոքր է** համապատասխան **գործոնի միջին արդյունքից**, ինչը ևս արտադրական ֆունկցիայի գոգավորության հետևանք է:

Արտադրական գործոնի սահմանային արդյունքը գրաֆիկորեն կարելի է ներկայացնել որպես գործոնի՝ տրված ծախսի դեպքում արտադրական ֆունկցիային տարված շոշափողի անկյունային գործակից: Այլ կերպ ասած, սահմանային արդյունքը որոշվում է որպես BC (թողարկված լրացուցիչ արտադրանք՝ ΔY) և AB (ծախսված լրացուցիչ գործոն՝ Δx_i) հատվածների երկարությունների հարաբերություն (գծապատկեր 10.2): Այսպիսով՝ i -րդ գործոնի սահմանային արդյունքը հավասար է $A'B'$ շոշափողի, իսկ միջին արդյունքը՝ OC հատվածի անկյունային գործակիցին:



Գծապատկեր 10.2. X_i գործոնի սառսասային արդյունքի գրաֆիկական եկնաբանությունը

Իրական արտադրական գործընթացներում տնտեսագետները հաճախ են առնչվում արտադրական գործոնների արդյունավետության նվազման երևույթի հետ, երբ արտադրության որևէ գործոնի սպառման ծավալն աճում է մյուս գործոնների ծավալների անփոփոխ մնալու պայմանում: Դա անվանում են արտադրական գործոնների սահմանային արդյունավետության նվազման օրենք:

Արտադրական գործոնների նվազող սահմանային արդյունավետությունը մաթեմատիկորեն արտահայտվում է արտադրական

ֆունկցիաների գոգավորությամբ, քանի որ ներկայացվածը նշանակում է, որ $f(x_1, x_2 \dots x_k)$ արտադրական ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները, ըստ համապատասխան գործոնի, բացասական են.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0, x_j = \text{const}, j \neq i \quad \text{դեպքում}$$

կամ

$$\frac{\partial M_{Y_{xi}}}{\partial x_i} < 0, x_j = \text{const}, j \neq i \quad \text{դեպքում:}$$

10.3. ԱՐՏԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ԷԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅՈՒՆ՝ ԸՍՏ *i*-ՐԴ ԳՈՐԾՈՆԻ

Արտադրության ծավալի վրա յուրաքանչյուր արտադրական գործոնի ազդեցության չափը գնահատելու համար կիրառվում են **գործոնների էլաստիկության (ճկունության) գործակիցները**: դեպքում *i*-րդ գործոնի էլաստիկության գործակիցը կամ **արտադրության էլաստիկությունն** ըստ *i*-րդ գործոնի բնութագրում է, թե քանի տոկոսով է աճում թողարկման ծավալը *i*-րդ գործոնի մեկ տոկոս փոփոխության դեպքում՝ մյուս գործոնների անփոփոխ մնալու պայմաններում:

i-րդ գործոնի էլաստիկության գործակիցը ներկայացնում է արտադրանքի ծավալի հարաբերական աճի հարաբերությունը ռեսուրսների հարաբերական աճին, այսինքն՝

$$\varepsilon_i = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta x_i}{x_i}} = \frac{x_i}{Y} \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x_i} = \frac{x_i}{Y} \frac{\partial Y}{\partial x_i} :$$

Արտադրանքի էլաստիկությունն ըստ *i*-րդ գործոնի կարելի է արտահայտել արտադրության գործոնի միջին և սահմանային արդյունքների միջոցով. այն հավասար է *i*-րդ գործոնի սահմանային և միջին արդյունքների հարաբերությանը.

$$\varepsilon_i = \frac{M_{Y_{x_i}}}{A_{Y_{x_i}}} :$$

Ջետևաբար՝ i -րդ գործոնի սահմանային արդյունքը կարող է որոշվել i -րդ գործոնի էլաստիկության գործակցի և i -րդ գործոնի միջին արդյունքի արտադրյալով.

$$M_{Y_{X_i}} = \varepsilon_i A_{Y_{X_i}} :$$

ε_i -ն հաճախ անվանում են նաև **թողարկման** կամ **արտադրության մասնակի էլաստիկություն**՝ ըստ i -րդ գործոնի, իսկ $\varepsilon = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i$ գործակիցը՝ **արտադրության լրիվ էլաստիկություն**:

Կապիտալ և աշխատուժ գործոնների դեպքում ներմուծվում են **էլաստիկության գործակիցներ**՝ ըստ կապիտալի՝ ε_K և ըստ աշխատուժի՝ ε_L , որոնք որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$\varepsilon_K = \frac{K}{f(K, L)} \frac{\partial f(K, L)}{\partial K},$$

$$\varepsilon_L = \frac{L}{f(K, L)} \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} :$$

Թեորեմ: Եթե արտադրական ֆունկցիան ունի աստիճանացուցչային կախվածություն ըստ i -րդ գործոնի՝

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_k) = x_i^\alpha g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k),$$

ապա արտադրության էլաստիկությունն ըստ i -րդ գործոնի հավասար է α -ի:

Ապացույց:

Գնահատենք i -րդ գործոնի սահմանային և միջին արդյունքները.

$$M_{Y_{X_i}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i^\alpha g}{\partial x_i} = g \frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_i} = \alpha x_i^{\alpha-1} g,$$

$$A_{Y_{X_i}} = \frac{f}{x_i} = \frac{x_i^\alpha g}{x_i} = x_i^{\alpha-1} g :$$

Արտադրության էլաստիկությունն ըստ i -րդ գործոնի հավասար կլինի.

$$\varepsilon_i = \frac{M_{Y_{X_i}}}{A_{Y_{X_i}}} = \frac{\alpha x_i^{\alpha-1} g}{x_i^{\alpha-1} g} = \alpha :$$

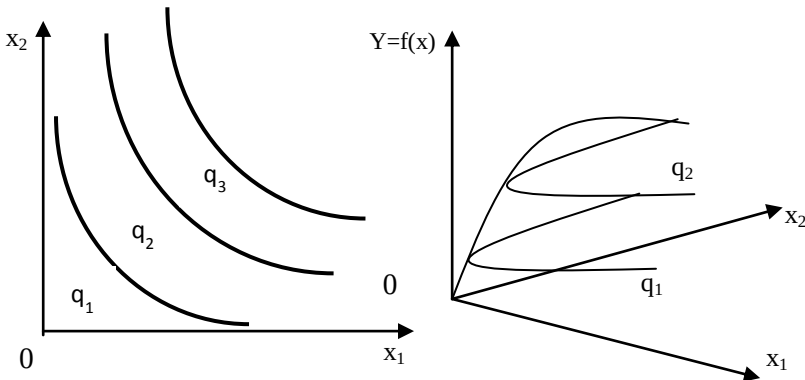
Նկատենք, որ ճիշտ է նաև հակառակը. երբ արտադրության էլաստիկության գործակիցն ըստ i -րդ գործոնի հաստատուն մեծություն է, ապա արտադրական ֆունկցիան, ըստ i -րդ գործոնի, ունի աստիճանացուցչային կախվածություն և պատկանում է Կոբ-Դուգլասի տիպի արտադրական ֆունկցիաների դասին:

10.4. ԻԶՈՔՎԱՆՏ ԵՎ ԻԶՈՎԼԻՆ: ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱՐԻՆՄԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՆՈՐՄԱ

Սահմանում: $Y = f(x)$ արտադրական ֆունկցիայի $q = f(x)$ (որտեղ $q > 0$ իրական թիվ է) **մակարդակի կորը կոչվում է արտադրական ֆունկցիայի իզոքվանտ:** Այլ կերպ ասած, իզոքվանտը ներկայացնում է բոլոր այն կետերի երկրաչափական տեղը, որտեղ արտադրական ֆունկցիան անընդհատ է և ընդունում է միևնույն հաստատուն q արժեքը:

Իզոքվանտներն ունեն հետևյալ հատկությունները.

- միմյանց հետ չեն հատվում,
- որքան հեռանում են կոորդինատների առանցքներից, այնքան դրանց վրա մեծանում է արտադրական ֆունկցիայի արժեքը,
- կոորդինատային առանցքների հետ չեն հատվում:



Գծապատկեր 10.3. Իզոքվանտներ

Գծապատկեր 10.3-ում պատկերված են արտադրական ֆունկցիայի իզոքվանտներ ($q_1 < q_2 < q_3$):

Ակնհայտ է, որ իզոքվանտով տեղաշարժը, որի դեպքում արտադրության ծավալը չի փոխվում, ուղեկցվում է արտադրական i -րդ գործոնը j -րդ գործոնով փոխարինմամբ: Սա նշանակում է, որ անհրաժեշտություն է առաջանում ներմուծելու i -րդ գործոնը j -րդ գործոնով **փոխարինման սահմանային նորմայի** հասկացությունը:

Սահմանում: Արտադրության i -րդ գործոնը j -րդ գործոնով **փոխարինման սահմանային նորման** բնութագրում է j -րդ գործոնի այն լրացուցիչ քանակությունը, որն անհրաժեշտ է i -րդ գործոնի մեկ միավոր կրճատումը փոխհատուցելու համար՝ արտադրության ծավալի և արտադրական մյուս գործոնների հաստատուն մակարդակի պայմաններում:

Դիտարկենք արտադրական գործոնների հավաքածուի տեղաշարժն իզոքվանտով: Սա նշանակում է, որ արտադրության ծավալն անփոփոխ է, այսինքն՝ կարող ենք գրել, որ արտադրական ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը հավասար է զրոյի.

$$dY = df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} dx_k = 0:$$

Քանի որ արտադրության մյուս գործոնները, բացառությամբ i -րդի և j -րդի, ևս հաստատուն են, ուստի կունենանք.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

$$M_{Yx_i} dx_i + M_{Yx_j} dx_j = 0:$$

Արդյունքում արտադրության i -րդ գործոնը j -րդ գործոնով փոխարինման սահմանային նորման հավասար է.

$$r_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{M_{Yx_i}}{M_{Yx_j}}:$$

i -րդ գործոնի j -րդ գործոնով փոխարինման սահմանային նորման **մոնոտոն նվազում** է i -րդ գործոնի աճի և j -րդ գործոնի հաստատուն մնալու դեպքում: Սա հետևում է արտադրական ֆունկցիայի զոգավորությունից, համաձայն որի՝ i -րդ գործոնի աճն ուղեկցվում է վերջինիս սահմանային օգտակարության նվազմամբ:

Արտադրության մի գործոնի փոխարինումը մյուսով հակադարձելի է: Կարելի է փոխարինել i -րդ գործոնը j -րդով և հակառակը: Փոխադարձ փոխարինման սահմանային նորմաները կապված են հետևյալ կերպ.

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ji}},$$

i -րդ գործոնը j -րդով փոխարինման սահմանային նորման կարելի է ներկայացնել նաև էլաստիկության գործակիցների միջոցով.

$$r_{ij} = \frac{M_{Y_i}}{M_{Y_j}} = \frac{\varepsilon_i \frac{y}{x_i}}{\varepsilon_j \frac{y}{x_j}} = \frac{\varepsilon_i x_j}{\varepsilon_j x_i};$$

Եթե դիտարկենք կապիտալ և աշխատուժ գործոններով արտադրական ֆունկցիան, ապա, օրինակ, աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորման կլինի.

$$r_{LK} = \frac{M_{Y_L}}{M_{Y_K}} = \frac{\varepsilon_L K}{\varepsilon_K L} = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_K} k,$$

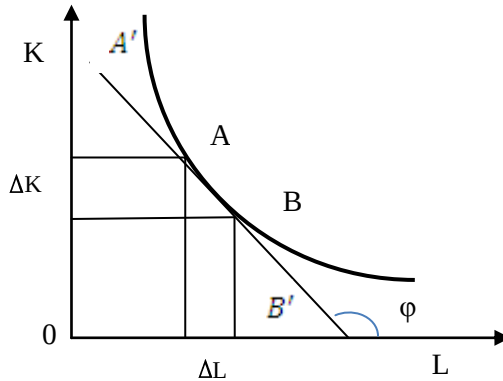
որտեղ k -ն կապիտալազիմվածությունն է:

Աստիճանացիցչային արտադրական ֆունկցիայի դեպքում՝ $f(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, երբ էլաստիկության գործակիցները հաստատուն են՝ $\varepsilon_L = \beta$, իսկ $\varepsilon_K = \alpha$, աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորման կլինի.

$$r_{LK} = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_K} k = \frac{\beta}{\alpha} k:$$

Գրաֆիկորեն աշխատուժը կապիտալով փոխարինելու սահմանային նորման հավասար է կապիտալի և աշխատուժի հավելաճերի հարաբերությանը (գծապատկեր 10.4): Քանի որ իզոքվանտն ունի բացասական թեքություն (շոշափողի անկյունային գործակիցը բացասական է), ուստի **փոխարինման սահմանային նորման** կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝ $r_{LK} = |tg \varphi|$:

Ներմուծենք նաև **իզոկլինների** գաղափարը, որոնք իզոքվանտների հետ միասին կարևոր դեր են խաղում արտադրական ֆունկցիաների վերլուծություններում:

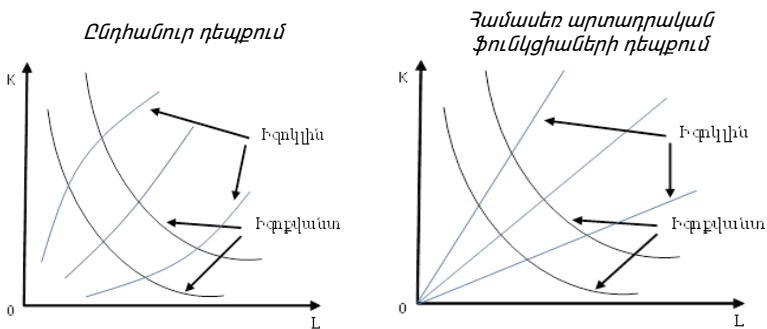


Գծապատկեր 10.4. Աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորմայի գրաֆիկական մեկնաբանումը

Սահմանում: Իզոկլինը բոլոր այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որտեղ արտադրական i -րդ գործոնը j -րդ գործոնով փոխարինման սահմանային նորման ընդունում է միևնույն հաստատուն արժեքը:

Այլ կերպ իզոկլիններն անվանում են արտադրական ֆունկցիայի առավելագույն աճի կորեր: Սրանք օրթոգոնալ են արտադրական ֆունկցիայի զրոյական աճի կորերին՝ իզոքվանտներին (գծապատկեր 10.5):

Թեորեմ: Համասեռ արտադրական ֆունկցիաների իզոկլինները սկզբնականից դուրս եկող ճառագայթներ են:



Գծապատկեր 10.5. Իզոկլիններ և իզոքվանտներ

10.5. ԱՐՏԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍՇՏԱՔԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ: ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԱՄԱՍԵՌՈՒԹՅՈՒՆ

Արտադրական ֆունկցիան օժտված է համասեռության հատկությամբ, ինչը մաթեմատիկորեն բնութագրվում է արտադրության մասշտաբի ընդլայնումից արտադրության հատույցով: Արտադրական բոլոր գործոնների համամասնական փոփոխությունը չի հանգեցնում արտադրության կառուցվածքի փոփոխության, այլ բերում է բոլոր գործոնների միջին և սահմանային արդյունքների հավասար փոփոխությունների: Ընդհանուր դեպքում, արտադրական ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմանը.

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k) = \lambda^\delta f(x_1, x_2, \dots, x_k), \lambda > 0,$$

որտեղ δ -ն կոչվում է **արտադրական ֆունկցիայի համասեռության աստիճան**: Այսինքն՝ արտադրական գործոնների համամասնական աճը λ անգամ հանգեցնում է թողարկված արտադրանքի աճի՝ λ^δ անգամ:

Նմանապես, երկու գործոնով (K և L) արտադրական ֆունկցիայի՝ $f(L, K)$ -ի համասեռությունն արտահայտվում է այսպես.

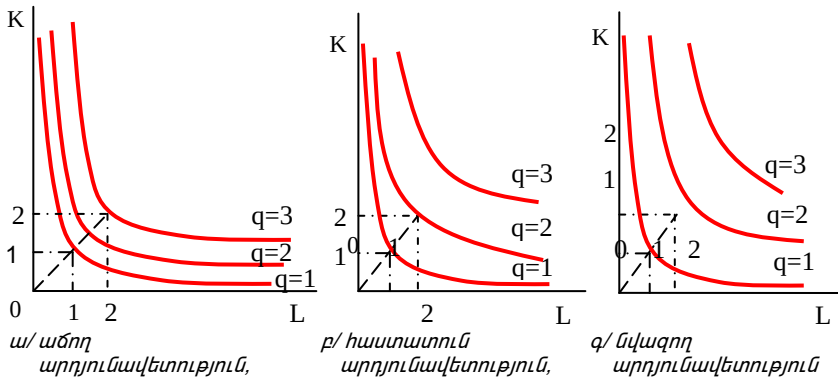
$$f(\lambda L, \lambda K) = \lambda^\delta f(L, K):$$

Հայտնի է, որ նորդասական արտադրական ֆունկցիան առաջին աստիճանի համասեռ կամ գծորեն համասեռ ֆունկցիա է, որի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_k) = \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_k), \lambda > 0:$$

Այսինքն՝ նորդասական արտադրական ֆունկցիայով բնութագրվող արտադրական համակարգերում արտադրական գործոնների աճը հանգեցնում է նույն համամասնությամբ թողարկման ծավալների աճի: Այս դեպքում ընդունված է ասել, որ նորդասական արտադրական ֆունկցիան ունի **կայուն հատույց մասշտաբից**:

Այլ կերպ ասած, δ **համասեռության աստիճանը բնութագրում է արտադրության արդյունավետությունը**: Կարելի է նկատել, որ եթե $\delta = 1$, ապա արտադրության արդյունավետությունը հաստատուն է, եթե $\delta < 1$, ապա արտադրության արդյունավետությունը նվազող է, իսկ հակառակ դեպքում՝ եթե $\delta > 1$, ապա արտադրության արդյունավետությունն աճող է (գծապատկեր 10.6-ում բերված են աճող, հաստատուն և նվազող արդյունավետությամբ արտադրական ֆունկցիաների իզոքվանտների օրինակներ):



Փծապատկեր 10.6. Արտադրության մասշտաբի ազդեցությունը

Ընդհանուր դեպքում, ցանկացած δ կարգի համասեռ, դիֆերենցելի արտադրական ֆունկցիայի համար տեղի ունի էյլերի թեորեմը, համաձայն որի՝

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_i} x_i = \delta f(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

որտեղից՝

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_i} \frac{x_i}{f(x_1, x_2, \dots, x_k)} = \delta$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i = \delta:$$

Այսպիսով՝ համասեռ արտադրական ֆունկցիաների համար արտադրության լրիվ էլաստիկությունը հավասար է համասեռության աստիճանին:

$f(L, K)$ առաջին կարգի համասեռ արտադրական ֆունկցիայի համար, օգտվելով էյլերի թեորեմից, ստանում ենք հավասարություն, որն ունի կարևոր տնտեսագիտական նշանակություն.

$$\frac{\partial f(L, K)}{\partial K} K + \frac{\partial f(L, K)}{\partial L} L = f(L, K),$$

$$M_{Y_K} K + M_{Y_L} L = Y:$$

Սա նշանակում է, որ թողարկված արդյունքը կարելի է ներկայացնել երկու գումարելիից կազմված գումարի տեսքով, որոնցից

առաջինը՝ $M_{y_k} K$ -ն, ներկայացնում է թողարկման ընդհանուր ծավալում կատարված կապիտալ ծախսերի ներդրումը, իսկ երկրորդը՝ $M_{y_L} L$ -ն, աշխատանքային ծախսերի ներդրումը: Այսինքն՝ բանաձևը հնարավորություն է տալիս գնահատելու արտադրական գործընթացին մասնակից յուրաքանչյուր արտադրական գործոնի դերը և բաժինը արտադրվող արդյունքում:

Սահմանենք նաև արտադրության մասշտաբից միջին և սահմանային արդյունքի, ինչպես նաև մասշտաբից էլաստիկության հասկացությունները:

Արտադրության մասշտաբից միջին արդյունքը λ անգամ ավելացված գործոններով թողարկված արտադրանքի հարաբերությունն է λ մասշտաբի գործակցին.

$$A_{y\lambda} = \frac{f(\lambda L, \lambda K)}{\lambda} = \lambda^{\delta-1} f(L, K):$$

Մասշտաբից սահմանային արդյունքը սահմանվում է որպես արտադրանքի հավելած, որը տեղի է ունենում արտադրության մասշտաբի գործակցի միավոր փոփոխության (աճի) դեպքում: **Մասշտաբից սահմանային արդյունքը** թողարկված արտադրանքի մասնակի աճանցյալն է՝ ըստ λ մասշտաբի գործակցի.

$$M_{y\lambda} = \frac{\partial f(\lambda L, \lambda K)}{\partial \lambda} = \partial \lambda^{\delta-1} f(L, K):$$

Արտադրության մասշտաբից էլաստիկության գործակիցը սահմանվում է որպես մասշտաբից՝ սահմանային և միջին արդյունքների հարաբերություն.

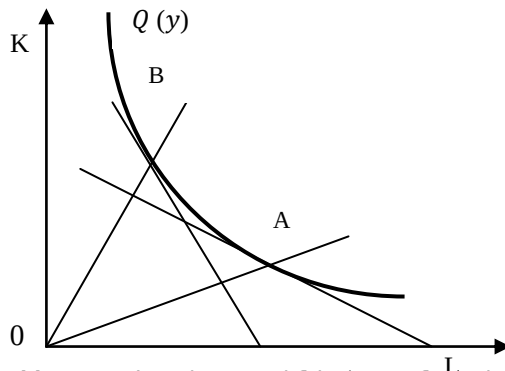
$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{M_{y\lambda}}{A_{y\lambda}} = \delta:$$

Ստացանք, որ արտադրության լրիվ էլաստիկության և մասշտաբից էլաստիկության հասկացությունները համընկնում են և հավասար են արտադրական ֆունկցիայի համասեռության աստիճանին:

10.6. ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱՐԻՆՄԱՆ ԷԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅՈՒՆ

Վերևում շարադրվածից պարզ դարձավ, որ իզոքվանտի ցանկացած կետ մի կողմից բնորոշվում է կապիտալի և աշխատուժի որոշակի ծախսերով, իսկ մյուս կողմից՝ աշխատուժը կապիտալով

փոխարինման որոշակի սահմանային նորմայով՝ r_{LK} և կապիտալազինվածությամբ՝ k : Հայտնի է նաև, որ աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորման բացարձակ մեծությամբ հավասար է իզոքվանտի համապատասխան կետում տարված շոշափողի անկյունային գործակցին: Կապիտալազինվածությունն էլ, իր հերթին, հավասար է կորորդինատային համակարգի սկզբնակետով և իզոքվանտի տվյալ կետով անցնող ճառագայթի անկյունային գործակցին: Այսինքն՝ որոշակի ճառագայթի վրա գտնվող ցանկացած կետում կապիտալազինվածության մակարդակը չի փոխվում: Պարզվում է նաև, որ աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորմայի և կապիտալազինվածության միջև գոյություն ունի որոշակի կապ: Այդ կապը ներկայացված է գծապատկեր 10.7-ում:



Գծապատկեր 10.7. Կապիտալազինվածության անդրեցությունն աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորմայի վրա

Աշխատուժի ծախսերի աճին զուգընթաց, օրինակ՝ B կետից դեպի A կետ տեղաշարժվելիս, տեղի է ունենում ինչպես աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորմայի, այնպես էլ կապիտալազինվածության մակարդակի կրճատում: Հետևաբար՝ այս արտադրական ֆունկցիայի համար կապիտալազինվածության մակարդակի փոփոխությունը հանգեցնում է աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորմայի փոփոխության: Այս կապը բնութագրելու համար ներմուծվել է արտադրական գործոնների փոխարինման էլաստիկություն հասկացությունը:

Սահմանում: i և j գործոնների փոխադարձ փոխարինման էլաստիկության գործակիցը՝ σ_{ij} -ն, ներկայացնում է i և j

գործոնների հարաբերության և այդ նույն գործոնների փոխարինման սահմանային նորմայի հարաբերական աճերի հարաբերությունը.

$$\sigma_{ij} = \frac{\frac{\partial \frac{x_i}{x_j}}{\frac{x_i}{x_j}}}{\frac{\partial r_{ij}}{r_{ij}}} = \frac{\frac{\partial \frac{x_i}{x_j}}{\frac{x_j}{x_j}}}{\frac{\partial r_{ij}}{\frac{x_i}{x_j}}} = \frac{\frac{\partial \frac{x_i}{x_j}}{\frac{x_j}{x_j}}}{\frac{\partial r_{ij}}{r_{ij}}} r_{ij} \frac{x_j}{x_i} :$$

i և j գործոնների փոխադարձ փոխարինման էլաստիկության գործակիցը բնութագրում է, թե քանի տոկոսով է փոխվում i և j գործոնների հարաբերությունը՝ դրանց փոխարինման սահմանային նորմայի մեկ տոկոս փոփոխության դեպքում:

Որքան գործոնների փոխարինման էլաստիկությունը մեծ է, այնքան ավելի մեծ է դրանց՝ մեկը մյուսով փոխարինելու հնարավորությունը: Եթե $\sigma_{ij} = +\infty$, ապա գործոնների փոխարինման սահման չկա, իսկ երբ $\sigma_{ij} = 0$, ապա գործոնների փոխարինումը մեկը մյուսով բացառվում է, այս դեպքում գործոնները **փոխլրացնում** են միմյանց:

Աշխատուժը կապիտալով փոխարինման էլաստիկությունը՝ σ_{LK} -ն, ցույց է տալիս, թե քանի տոկոսով է փոխվում կապիտալազդեցիկությունը՝ աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորմայի մեկ տոկոս փոփոխության դեպքում: Աշխատուժը կապիտալով փոխարինման էլաստիկությունը մաթեմատիկորեն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\sigma_{LK} = \frac{\frac{\partial k/k}{\partial r_{LK}/r_{LK}}}{\frac{\partial k/k}{\partial r_{LK}/r_{LK}}} = \frac{\frac{\partial k/k}{\partial r_{LK}/r_{LK}}}{\frac{k/r_{LK}}{k/r_{LK}}} :$$

Համապատասխանաբար՝ կարելի է սահմանել կապիտալն աշխատուժով փոխարինման էլաստիկությունը՝ σ_{LK} -ը:

Գրաֆիկորեն աշխատուժը կապիտալով փոխարինման էլաստիկությունը՝ σ_{LK} -ն, կարելի է մեկնաբանել որպես B կետից տեղաշարժ այնպիսի A կետ, որ շոշափողի անկյունային գործակցի տանգենտ աճի 1%-ով, այսինքն՝ փոխարինման սահմանային նորման աճի 1%-ով ($tg \alpha_A = -\frac{dK}{dL} = r_{LK}$).

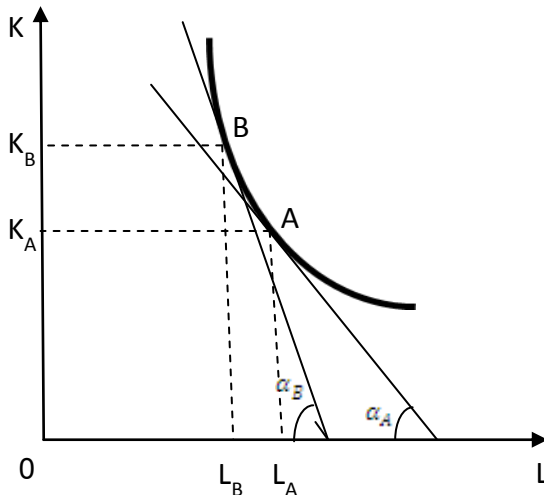
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_B - \operatorname{tg} \alpha_A}{\operatorname{tg} \alpha_A} 100\% = 1\%;$$

Համաձայն աշխատուժը կապիտալով փոխարինման էլաստիկության սահմանման՝ կապիտալազինվածությունը կաճի $\sigma\%$ -ով, այսինքն՝

$$\frac{k_B - k_A}{k_A} 100\% = \left(\frac{K_B}{K_A} \frac{L_A}{L_B} - 1 \right) 100\% = \sigma\%,$$

որտեղ $\frac{K_B}{K_A}$ -ն կապիտալի աճի տեմպն է (K_A -ի նկատմամբ),

$\frac{L_A}{L_B}$ -ն աշխատուժի նվազման տեմպն է (L_B -ի նկատմամբ):



Գծապատկեր 10.8. Արտադրական գործոնների փոխարինման էլաստիկության գրաֆիկական մեկնաբանումը

Այսպիսով՝ α_A անկյան տանգենտի 1% աճի դեպքում կապիտալի աճը և աշխատուժի կրճատումը կլինեն ավելի մեծ, եթե համեմատաբար մեծ է աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորման՝ r_{LK} -ն: Իսկ սա նշանակում է, որ r_{LK} -ի աճն ուղեկցվում է իզոքվանտի թեքության կրճատմամբ (գծապատկեր 10.8):

Հետևաբար՝ աշխատուժը կապիտալով փոխարինման էլաստիկությունը բնութագրում է, թե որքան արագորեն է փոխվում աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորման իզոքվանտով տեղաշարժվելիս:

Պարզ ձևափոխություններով կարելի է ցույց տալ, որ $\sigma_{LK} = \sigma_{KL} = \sigma$, իսկ աստիճանացուցչային արտադրական ֆունկցիաների համար՝ $\sigma = 1$:

Այսպես՝ $f(K, L) = AK^\alpha L^\beta$ աստիճանացուցչային արտադրական ֆունկցիայի համար ունենք.

$$\frac{\partial f}{\partial K} = \alpha \frac{Y}{K} \quad \text{և} \quad \frac{\partial f}{\partial L} = \beta \frac{Y}{L} \quad \text{ուստի} \quad r = \frac{\beta}{\alpha} k, \quad \frac{\partial r}{\partial k} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \sigma = -\frac{r}{k} \left(\frac{\partial r}{\partial k} \right)^{-1} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha}{\beta} = 1:$$

Գծային արտադրական ֆունկցիայի դեպքում՝ $\sigma \rightarrow \infty$ իսկ Լեոնտի արտադրական ֆունկցիայի դեպքում՝ $\sigma = 0$:

Գործոնների փոխադարձ փոխարինման էլաստիկությունը կարող է լինել ինչպես հաստատուն, այնպես էլ փոփոխվող մեծություն: Հետևաբար՝ հաճախ արտադրական ֆունկցիաները դասակարգվում են՝ հենց այդ չափանիշից ելնելով.

- գործոնների փոխադարձ փոխարինման հաստատուն էլաստիկությամբ արտադրական ֆունկցիաներ (**CES** – Constant Elasticity of Substitution),
- գործոնների փոխադարձ փոխարինման փոփոխուն էլաստիկությամբ արտադրական ֆունկցիաներ (**VES** – Variable Elasticity of Substitution):

10.7. ԳՈՐԾՈՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ՓՈԽԱՐԻՆՄԱՆ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԷԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՐՔ ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ (CES)

Ինչպես հուշում է CES դասի անվանումը, այս խմբի արտադրական ֆունկցիաների համար արտադրական գործոնների փոխադարձ փոխարինման էլաստիկությունը հաստատուն է՝ $\sigma = \text{const}$: Ֆունկցիաների այս դասը հաճախ անվանում են նաև **ACMC**¹²:

Ընդհանուր տեսքով CES արտադրական ֆունկցիաները ներկայացվում են հետևյալ կերպ.

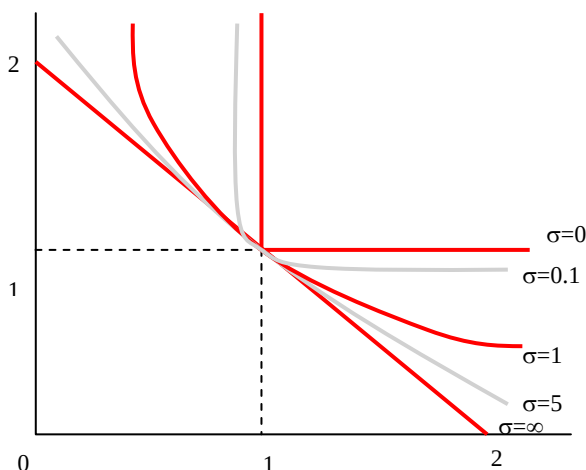
¹² Չորս գիտնականի ազգանունների (Էրոու, Չեների, Մինհաս և Սոլոու) սկզբնատառերից կազմված հապավում:

$$Y = A \left(\alpha_1 x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \dots + \alpha_n x_n^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

որտեղ $A > 0$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $\sigma \in [0, \infty)$, δ -ն համասեռության աստիճանն է:

Առաջին կարգի համասեռ, երկգործոն արտադրական ֆունկցիայի դեպքում.

$$Y = A \left(\alpha L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} :$$



Գծապատկեր 10.9. CES արտադրական ֆունկցիայի իզոքվանտները

Գծապատկեր 10.9-ում ներկայացված են CES արտադրական ֆունկցիայի իզոքվանտները σ -ի տարբեր արժեքների համար: Ինչպես տեսնում ենք, CES ֆունկցիայի իզոքվանտները փոխվում են՝ L-աձևից (Լեոնտևի արտադրական ֆունկցիա) մինչև կորածն (Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիա) և մինչև ուղիղ գիծ (զծային արտադրական ֆունկցիա):

Այսպիսով՝ կարելի է ասել, որ CES արտադրական ֆունկցիան համասեռ արտադրական ֆունկցիաների ընդհանուր սահմանումն է: Լայն տարածում գտած մյուս արտադրական ֆունկցիաները CES ֆունկցիայի մասնակի դեպքեր են (աղյուսակ 10.1):

CES ֆունկցիայի մասնակի դեպքերը

ԱՖ	σ	δ	Այլ բնութագրեր
Կոր-Դուգլասի	1	1	- գործոնները լիարժեքորեն փոխարինելի են - իզոքվանտներն ուղիղ գծեր են
Լեոնտսի	0	1	- գործոնները փոխլրացնող են - իզոքվանտները L-աձև գծեր են
Գծային	∞	1	իզոքվանտները կորեր են

10.8. ԿՈՐ-ԴՈՒԳԼԱՍԻ ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիան¹³ լայն տարածում ունի իր պարզ մաթեմատիկական գրառման և գործակիցների տնտեսագիտական մեկնաբանության շնորհիվ:

Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիան նկարագրում է արտադրանքի ծավալի կախվածությունն աշխատանքային և կապիտալ ծախսերից.

$$Y = f(K, L) = AK^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

որտեղ A -ն և α -ն հաստատուն մեծություններ են, $0 < \alpha < 1$:

Լոգարիթմելով Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիան՝ կստանանք հետևյալ գծային հավասարումը.

$$\ln Y = \ln f(K, L) = \ln A + \alpha \cdot \ln K + (1 - \alpha) \cdot \ln L:$$

Արտադրական ֆունկցիան նման տեսքով ներկայացնելու առավելությունը գործակիցների գնահատման համար գծային ռեգրեսիայի դասական մեթոդների կիրառման հնարավորության մեջ է:

Հաճախ Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիան պատկերվում է թողարկվող արտադրանքի և գործոնների հավելաճերի միջոցով կամ, որ նույնն է՝ տեմպային տեսքով.

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L},$$

որտեղ Y -ը, K -ն և L -ը համապատասխանաբար՝ թողարկվող արտադրանքի, ծախսված կապիտալի և աշխատանքային ռեսուրս-

¹³ Ներկայացրել են Չ. Կորը և Պ. Դուգլասը 1928 թ.: Այն ստացվել է արտադրանքի ֆիզիկական ծավալի, հիմնական կապիտալի և կատարած աշխատանքային ծախսերի (մարդ/ժամեր) 1899–1922 թթ. ցուցանիշների կապի վիճակագրական հետազոտության արդյունքում:

ների բանակություններն են, իսկ $\Delta Y, \Delta K, \Delta L$ -ը համապատասխանաբար՝ արտադրանքի, կապիտալի և աշխատուժի հավելաճերն են տվյալ ժամանակահատվածում:

Կապիտալի միջին արդյունքը Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիայի համար ունի հետևյալ տեսքը.

$$A_{Y_K} = \frac{Y}{K} = \frac{f(K, L)}{K} = \frac{AK^\alpha L^{1-\alpha}}{K} = AK^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = A \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha-1} = Ak^{\alpha-1}:$$

Աշխատուժի A_{Y_L} միջին արտադրողականությունը ներկայացվում է հետևյալ կերպ.

$$A_{Y_L} = \frac{Y}{L} = \frac{f(K, L)}{L} = \frac{AK^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = AK^\alpha L^{-\alpha} = A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha = Ak^\alpha,$$

որտեղ k -ն կապիտալազինվածությունն է:

Կապիտալի սահմանային արդյունքը Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիայի համար կլինի.

$$M_{Y_K} = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} = \frac{\partial AK^\alpha L^{1-\alpha}}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha \frac{Y}{K} = \alpha A \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha-1} = \alpha Ak^{\alpha-1}:$$

Աշխատուժի սահմանային արդյունքը Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիայի համար կլինի.

$$M_{Y_L} = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} = \frac{\partial AK^\alpha L^{1-\alpha}}{\partial L} = (1-\alpha)AK^\alpha L^{-\alpha} = (1-\alpha)A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha = (1-\alpha)Ak^\alpha:$$

ε_K և ε_L էլաստիկության գործակիցները համապատասխանաբար՝ որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$\varepsilon_K = \frac{K}{f(K, L)} \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} = \frac{M_{Y_K}}{A_{Y_K}} = \frac{\alpha AK^{\alpha-1}}{AK^{\alpha-1}} = \alpha,$$

$$\varepsilon_L = \frac{L}{f(K, L)} \frac{\partial f(K, L)}{\partial L} = \frac{M_{Y_L}}{A_{Y_L}} = \frac{(\alpha-1)AK^\alpha}{AK^\alpha} = 1-\alpha:$$

Հետևաբար՝ Կոր-Դուգլասի ֆունկցիայի համար կապիտալից էլաստիկության բարձր գործակիցն համապատասխանում է աշխատուժից էլաստիկության ցածր գործակից և հակառակը:

Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիան գծորեն համասեռ է, այսինքն՝ կապիտալ և աշխատուժ գործոնների համամասնական փոփոխությունը λ անգամ, հանգեցնում է թողարկման ծավալների λ անգամ փոփոխության.

$$Y = f(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^{1-\alpha} = A\lambda^\alpha K^\alpha \lambda^{1-\alpha} L^{1-\alpha} = \lambda AK^\alpha L^{1-\alpha} = \lambda f(K, L):$$

Արտադրության մասշտաբի միջին արդյունքը Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիայի համար որոշվում է.

$$A_{Y\lambda} = \frac{f(\lambda L, \lambda K)}{\lambda} = f(L, K):$$

Արտադրության մասշտաբի սահմանային արդյունքը Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիայի համար հավասար է.

$$M_{Y\lambda} = \frac{\partial f(\lambda L, \lambda K)}{\partial \lambda} = f(L, K):$$

Այսպիսի արտադրական համակարգում արտադրության մասշտաբի էլաստիկության գործակիցը հավասար է մեկի՝ արտադրության միջին և սահմանային արդյունքների հավասարության պատճառով: Իրոք, ըստ արտադրության մասշտաբի էլաստիկության գործակցի սահմանման, ունենք.

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{M_{Y\lambda}}{A_{Y\lambda}} = 1:$$

Հետևաբար՝ Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիայով նկարագրվող արտադրական համակարգի արդյունավետությունը կախված չէ արտադրության մասշտաբից:

Աշխատուժի՝ կապիտալով փոխարինման սահմանային r_{LK} նորման, արտահայտված էլաստիկության գործակիցներով և կապիտալազինվածության մակարդակով, ունի հետևյալ տեսքը.

$$r_{LK} = \frac{\varepsilon_L K}{\varepsilon_K L} = \frac{(1-\alpha)K}{\alpha L} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} k:$$

Աշխատուժը կապիտալով փոխարինման էլաստիկության գործակիցը Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիայի համար հավասար է 1-ի.

$$\sigma = \frac{\left(\frac{\partial k}{k}\right)}{\left(\frac{\partial r_{LK}}{r_{LK}}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial k}{\partial r_{LK}}\right)}{\left(\frac{k}{r_{LK}}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial \left(\frac{\alpha \cdot r_{LK}}{1-\alpha}\right)}{\partial r_{LK}}\right)}{\left(\frac{\left(\frac{\alpha \cdot r_{LK}}{1-\alpha}\right)}{r_{LK}}\right)} = 1:$$

Սա նշանակում է, որ Կոր-Դուգլասի արտադրական ֆունկցիայի համար կապիտալազինվածության 1% աճի դեպքում աշխատուժը կապիտալով փոխարինման սահմանային նորման նույնպես ավելանում է ճիշտ 1%-ով:

10.9. ԼԵՈՆՏԵԿԻ ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Լեոնտևի կամ **գործոնների հաստատուն համամասնությամբ արտադրական ֆունկցիան** նկարագրում է այնպիսի արտադրական գործընթացներ, որտեղ արտադրության գործոնները փոխլրացնող են: Դա նշանակում է, որ տեխնոլոգիական գործընթացում հնարավոր չէ մեկ գործոնը մյուսով փոխարինել և մեկ գործոնի անբավարարությունը չի կարող **փոխհատուցվել** (կոմպենսացվել) մյուս գործոնի ավելցուկով: Արտադրական նման գործընթացը ենթադրում է օգտագործվող գործոնների քանակության հաստատուն համամասնությունը:

Լեոնտևի ֆունկցիան կառուցելիս ենթադրվում է, որ արտադրական համակարգը բավարարում է գծորեն համասեռության հատկությունը: Հետևաբար՝ դրանով նկարագրվող արտադրական համակարգի դեպքում գործոնների ծախսերը λ անգամ ավելացնելիս արտադրանքի թողարկման ծավալը ևս ավելանում է λ անգամ: Լեոնտևի արտադրական ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(K, L) = \min \left\{ \frac{K}{a}, \frac{L}{b} \right\},$$

որտեղ a -ն և b -ն դրական հաստատուններ են և համապատասխանաբար արտահայտում են կապիտալի և աշխատուժի միավորների այն քանակությունները, որոնք անհրաժեշտ են միավոր արտադրանքի թողարկման համար:

10.10. ԳԾԱՅԻՆ ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Այժմ դիտարկենք հակառակ իրավիճակը, երբ արտադրությունում օգտագործվող գործոնները բացարձակ փոխարինվող են: Այդ դեպքում հնարավոր է **փոխհատուցել** (կոմպենսացնել) մեկ գործոնի ծախսի նվազեցումը մյուսի ավելացմամբ, ինչպես նաև ամբողջությամբ փոխարինել մեկ գործոնը մյուսով: Արտադրական գործընթացը, որը բավարարում է գործոնների բացարձակ փոխլրացման պայմանը, կոչվում է **ճկուն**: Նման արտադրական գործընթացով համակարգի համար, երբ գործոնների ծախսերի և թողարկված արտադրանքի միջև առկա է գծային կապ, արտադրական ֆունկցիան կոչվում է **գծային**.

$$Y = f(K, L) = aK + bL,$$

որտեղ a -ն և b -ն դրական հաստատուններ են:

Հարկ է նշել, որ գծային արտադրական ֆունկցիան օժտված չէ այն հատկություններով, որոնք բնորոշ են նորդասական համա-

պատասխան ֆունկցիաներին: Այստեղ խախտվում է առաջին հատկությունը: Ինչը նշանակում է, որ, ի տարբերություն նորդասական արտադրական ֆունկցիաների, արտադրական գործոններից որևէ մեկի բացակայության դեպքում արտադրական գործընթացը տեղի կունենա: Օրինակ՝ աշխատուժ գործոնի բացակայության դեպքում թողարկումը կկազմի.

$$Y = f(K, 0) = aK :$$

Այլ կերպ ասած, գծային արտադրական ֆունկցիաների իզոքվանտները հատում են կոորդինատային առանցքները: Խախտվում է նաև երրորդ հատկությունը. գծային արտադրական ֆունկցիան խիստ գոգավոր չէ, և դրա սահմանային արդյունքը հաստատուն է:

11.1. ՀԱՇՎԵԿՇՈՒՄՅՈՒՆ ՄԵԹՈԴԸ

Ինչպես ստատիկ, այնպես էլ դինամիկ հաշվեկշռային մոդելները լայնորեն կիրառվում են տնտեսական գործընթացների և համակարգերի տնտեսամաթեմատիկական մոդելավորման ժամանակ: Այդ մոդելների հիմքում **հաշվեկշռային**, այսինքն՝ գոյություն ունեցող նյութական, աշխատանքային ու ֆինանսական ռեսուրսների և դրանց պահանջարկների փոխադարձ համադրման մեթոդն է: Եթե տնտեսական համակարգը նկարագրենք ամբողջությամբ, ապա դրա հաշվեկշռային մոդելը կներկայացվի որպես հավասարումների համակարգ, որտեղ յուրաքանչյուր հավասարում արտահայտում է առանձին տնտեսական օբյեկտների կողմից արտադրվող արտադրանքի և վերջինիս նկատմամբ համընդհանուր պահանջարկի հաշվեկշիռը: Այդ մոտեցմամբ՝ դիտարկվող համակարգը բաղկացած է տնտեսական օբյեկտներից (ճյուղ, արտադրություն և այլն), որոնցից յուրաքանչյուրն արտադրում է որոշակի արտադրանք, որի մի մասը սպառվում է համակարգի մնացած օբյեկտների (ճյուղերի) կողմից, իսկ մյուս մասը դուրս է բերվում համակարգի սահմաններից՝ որպես վերջնական արդյունք: Եթե արտադրանքի հասկացության փոխարեն օգտագործվի ավելի ընդհանուր՝ ռեսուրսի հասկացությունը, ապա, որպես հաշվեկշռային մոդել, պետք է հասկանալ հավասարումների համակարգ, որը բավարարում է առկա ռեսուրսների և դրանց օգտագործման (ռեսուրսների առաջարկի և պահանջարկի) համապատասխանության պահանջները: Բացի թողարկվող արտադրանքի և դրա նկատմամբ պահանջարկի համապատասխանություն՝ վերը նշված պահանջից, կարելի է բերել հաշվեկշռային համապատասխանության այլ օրինակներ, ինչպիսիք են առկա աշխատանքային ռեսուրսների և աշխատատեղերի, բնակչության վճարունակ պահանջարկի և ապրանքների ու ծառայությունների առաջարկի հաշվեկշիռները և այլն:

Ընդհանուր առմամբ, հաշվեկշիռները լինում են.

- նյութական, որոնք որոշակի հաշվեկշիռներ են (երկաթի, էլեկտրաէներգիայի և այլն),
- աշխատանքային, որոնք աշխատանքային ռեսուրսների ձևավորման և օգտագործման հաշվեկշիռներն են (աշխատուժի հաշվեկշիռ և այլն),

- ֆինանսական, որոնք բնութագրում են վերարտադրության ֆինանսական կողմը (եկամուտների ու ծախսերի հաշվեկշիռ և այլն):

Ընդհանրական և զարգացած ձև են **միջճյուղային հաշվեկշիռները** և դրանց մոդելները:

Հաշվեկշռային մեթոդը և դրա հիման վրա ստեղծված հաշվեկշռային մոդելները ծառայում են որպես հիմնական գործիք տնտեսության մեջ համամասնությունների որոշման, վերլուծության և պահպանման համար: Հաշվետու հաշվեկշիռների հիման վրա կառուցված հաշվեկշռային մոդելները բնութագրում են առկա համամասնությունները:

Միջճյուղային հաշվեկշռային մոդելներ կառուցելիս, որպես կանոն, օգտագործվում է առանձնահատուկ հասկացություն՝ «**մաքուր, զուտ**» (կամ տեխնոլոգիական) **ճյուղ**», այսինքն՝ պայմանական ճյուղ, որը միավորում է տվյալ արտադրանքն անկախ դրա ենթակայությունից և սեփականության ձևից: Տնտեսության ճյուղերից մաքուր ճյուղերին անցումը պահանջում է տնտեսական օբյեկտների իրական տվյալների հատուկ ձևափոխություն, օրինակ՝ ճյուղերի ագրեգացում, ներճյուղային շրջանառության բացառում և այլն: Այս պայմաններում «միջարտադրական հաշվեկշիռ» և «միջճյուղային հաշվեկշիռ» հասկացությունները գործնականորեն նույնն են, տարբերությունը միայն հաշվեկշռում էլեմենտների (տարրերի) չափման միավորների (բնեղեն և արժեքային) ընտրության մեջ է:

11.2. ՄԻՋՃՅՈՒՂԱՅԻՆ ՀԱՇՎԵԿՇՈՒ ՄՏԱՏԻԿ ՄՈԴԵԼՆԵՐԸ

Միջճյուղային հաշվեկշիռներն ուսումնասիրում են արտադրության բոլոր տարրերի շարժը փոխադարձ կապի մեջ՝ անընդհատ նորացման գործընթացում:

Արդեն նշել ենք, որ միջճյուղային հաշվեկշիռներ կարելի է կազմել ինչպես **բնեղեն**, այնպես էլ **արժեքային** (դրամական) արտահայտությամբ:

Դիտարկենք այդ սխեմաները և մոդելները:

Վերարտադրության նյութաիրային կապերն արտացոլելու համար կազմվում են բնեղեն արտահայտությամբ միջճյուղային հաշվեկշիռներ: Դրանք (աղյուսակ 11.1) բաղկացած են երկու բաժնից: Առաջին բաժինը բնութագրում է արտադրությանն անհրաժեշտ ռեսուրսների ձևավորման աղբյուրները:

$$R_i = Q_i + S_i \quad i = \overline{1, n},$$

որտեղ R_i -ն i -րդ ռեսուրսն է,

Q_i -ն՝ i -րդ ռեսուրսի արտադրությունը,

S_i -ն՝ i -րդ այլ ռեսուրսներ:

Աղյուսակ 11.1

Միջոցառումների հաշվեկշռի սխեման բնեղեն արտահայտությամբ

Արտադրանքների անվանում	Չափի միավոր	Ռեսուրսների ստացում			Ռեսուրսների օգտագործում								
		Ընդամենը	Այլ թվում	Արտադրված է այլ ռեսուրսներ / ներմուծում, պաշարներ և պահուստներ՝ տարեկան	Ընթացիկ արտադրական սպառում						Վերջնական սպառում	Օգտագործված ռեսուրսներ՝ ընդամենը	
					1	2	...	j	...	n			
1		R_1	Q_1	S_1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1j}	...	q_{1n}	$\sum_{j=1}^n q_{1j}$	G_1	R_1
2		R_2	Q_2	S_2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2j}	...	q_{2n}	$\sum_{j=1}^n q_{2j}$	G_2	R_2
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i		R_i	Q_i	S_i	q_{i1}	q_{i2}	...	q_{ij}	...	q_{in}	$\sum_{j=1}^n q_{ij}$	G_i	R_i
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n		R_n	Q_n	S_n	q_{n1}	q_{n2}	...	q_{nj}	...	q_{nn}	$\sum_{j=1}^n q_{nj}$	G_n	R_n

Երկրորդ բաժինը բնութագրում է ընթացիկ արտադրական և վերջնական օգտագործման ռեսուրսները (նույն կտրվածքով, ինչ-պես դիտարկվում է ռեսուրսների ձևավորումը)։

$$Q_i + S_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} + G_i \quad i = \overline{1, n},$$

որտեղ Q_{ij} -ն i -րդ ռեսուրսի օգտագործումն է j -րդ արտադրանքը ստանալու համար,

G_i -ն՝ i -րդ արտադրանքի վերջնական օգտագործումը:

Սիջճյուղային հաշվեկշռի սխեման արժեքային արտահայտությամբ (աղյուսակ 11.2) ներկայացնում է «շախմատային» աղյուսակ, որն արդյունք է երկու հաշվեկշռի համադրման:

Աղյուսակ 11.2

Սիջճյուղային հաշվեկշռի սխեման արժեքային արտահայտությամբ

I Ծյուղեր	Ծյուղեր							II Վերջնական արտադրանքի ֆամախառն արտադրանք	
		1	2	...	j	...	n		
I	1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	y_2	x_2
	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮
	i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}	y_i	x_i
	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮
	n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nj}	...	x_{nn}	y_n	x_n
III	Ամորտիզացիա Ձուտ արդյունք	r_1	r_2	...	r_j	...	r_n	IV	
	Ֆամախառն արտադրանք	$v_1 + m_1$	$v_2 + m_2$	...	$v_j + m_j$	...	$v_n + m_n$		
		x_1	x_2	...	x_j	...	x_n		

1. Ֆամախառն արտադրանքի արտադրության հաշվեկշիռ (առաջին և երրորդ բաժինները միասին վերցրած):
2. Ֆամախառն արտադրանքի բաշխման հաշվեկշիռ (առաջին և երկրորդ բաժինները միասին վերցրած):

Սիջճյուղային հաշվեկշիռը բաղկացած է չորս բաժնից, որոնք կոչվում են **քառորդներ** կամ **քառորդակներ**:

Առաջին, հիմնական քառորդը բնութագրում է միջճյուղային նյութական կապերը: Այդ բաժնի տարրերն ունեն երկակի իմաստ: Սի կողմից՝ դրանք ցույց են տալիս, թե որքան է i -րդ ($i = \overline{1, n}$) ճյուղի արտադրանքից օգտագործվում առանձին ճյուղերում արտադրանք ստանալու համար և մյուս կողմից՝ արտահայտում են j -րդ

$(j = \overline{1, n})$ ճյուղի համախառն արտադրանքը ստանալուն i -րդ ճյուղերի մասնակցության աստիճանը: Ըստ էության, առաջին բաժինը ներկայացնում է n -չափանի քառակուսային մատրից, որի բոլոր տարրերի գումարը հավասար է նյութական ոլորտում արտադրության միջոցների փոխհատուցման տարեկան ֆոնդին:

Միջնյուղային հաշվեկշռի երկրորդ բաժինը բնութագրում է **վերջնական արդյունքի՝** արտադրության գործընթացի այդ վերջնական նպատակի նյութաիրային կառուցվածքը:

Միջնյուղային հաշվեկշռի երրորդ բաժինն արտացոլում է տնտեսության մեջ արտադրված **պայմանական զուտ արդյունքը** (զուտ արդյունքին գումարած հիմնական արտադրական կապիտալի ամորտիզացիոն հատկացումները) իր տարրերով (աշխատավարձ, շահույթ և այլն):

Միջնյուղային հաշվեկշռի չորրորդ բաժինը կարող է բնութագրել նորաստեղծ արժեքի կամ ազգային եկամտի մասնակի վերաբաշխման հարցեր:

Միջնյուղային հաշվեկշռի սխեման կառուցված է այնպես, որ այն, ըստ տողերի (i) , նկարագրում է համախառն արտադրանքի բաշխումը, իսկ ըստ սյուների (j) ՝ այդ արտադրանքի արտադրությունը:

Միջնյուղային հաշվեկշռի սխեմայի «շախմատային» տեսքը հնարավորություն է տալիս ապահովելու հաշվեկշռվածության հետևյալ **հիմնական նախապայմանները**.

- Նույն տողի և սյան տարրերի գումարները միմյանց հավասար են: Դա նշանակում է, որ հնարավոր է բաշխել և արտահանել ճյուղի արտադրանքից այնքան, որքան այդ ճյուղում արտադրվում և ներմուծվում է.

$$x_i = x_j, \text{ երբ } i = j :$$

- Տնտեսության մեջ արտադրված և բաշխված համախառն արտադրանքները միմյանց հավասար են.

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j ,$$

որն ուղղակիորեն հետևում է առաջին պայմանից:

11.3. ՄԻՋՅՈՒՂԱՅԻՆ ՀԱՇՎԵԿՇՈՒ ԿԱԽՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ճյուղերի միջև տնտեսական կապերի քանակական արտահայտությունները միջճյուղային հաշվեկշռի սխեմայում (աղյուսակ 11.2), ըստ կատարված նշանակումների, հնարավոր է ներկայացնել գծային հավասարումների համակարգի տեսքով:

1. Ճյուղերի համախառն արտադրանքի բաշխման տեսանկյունից, կարող ենք գրել.

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i \quad i = \overline{1, n}, \quad (11.1)$$

որտեղ x_{ij} -ը ցույց է տալիս, թե որքան է i -րդ ճյուղի արտադրանքից օգտագործվում j -րդ ճյուղի արտադրության համար, y_i -ն i -րդ ճյուղի վերջնական արդյունքն է, x_i -ն՝ i -րդ ճյուղի համախառն արտադրանքը:

2. Նման կերպով, համախառն արտադրանքի արտադրության տեսանկյունից, կարող ենք գրել.

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + r_j + v_j + m_j \quad j = \overline{1, n}, \quad (11.2)$$

որտեղ r_j -ն j -րդ ճյուղում ամորտիզացիոն հատկացումներն են, v_j -ն աշխատանքի վարձատրությունն է j -րդ ճյուղում, m_j -ն j -րդ ճյուղում ստեղծված հավելյալ արդյունքն է:

Նշանակելով j -րդ ճյուղի պայմանական զուտ արդյունքը Z_j -ով՝ կունենանք.

$$z_j = r_j + v_j + m_j: \quad (11.3)$$

(11.3)-ը տեղադրելով (11.2)-ի մեջ՝ կստանանք.

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + z_j, \quad j = \overline{1, n}: \quad (11.4)$$

3. Եթե (11.1) համակարգի բոլոր հավասարումները զուտաբերենք ըստ i , իսկ (11.4) համակարգի բոլոր հավասարումները՝ ըստ j ճյուղերի, ապա կստանանք.

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^n y_i, \quad (11.5)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n z_j : \quad (11.6)$$

(11.5) և (11.6) արտահայտություններում ծախ մասերը իրար հավասար են՝ ըստ հաշվեկշռվածության երկրորդ պայմանի, հետևաբար՝ հավասար են նաև աջ մասերը.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n z_j :$$

Այստեղից՝ տնտեսության մեջ ամբողջ վերջնական և պայմանական զուտ արդյունքները հավասար են, մեկը մյուսի արժեքային համարժեքն է: Այսինքն՝

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n z_j :$$

11.4. ՈՒՂՂԱԿԻ ԾԱԽՍՆԵՐԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐ

Ուղղակի ծախսերի գործակիցներ: Միջճյուղային հաշվեկշռում ճյուղերի միջև տեխնոլոգիական կապերը որոշվում են ուղղակի ծախսերի գործակիցների միջոցով: **Ուղղակի ծախսերի a_{ij} գործակիցը** ցույց է տալիս, թե որքան է i -րդ ճյուղի արտադրանքից օգտագործվում j -րդ ճյուղում միավոր համախառն արտադրանք ստանալու համար.

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad i, j = \overline{1, n} :$$

Ուղղակի ծախսերի գործակիցները բավարարում են հետևյալ պայմանները.

1. $a_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, քանի որ $x_j > 0$, իսկ $x_{ij} \geq 0$: Վերջինս հավասար է զրոյի միայն այն դեպքում, երբ i -րդ ճյուղի արտադրական գործընթացում j -րդ ճյուղի արտադրանքը չի օգտագործվում, այսինքն՝ $x_{ij} = 0$:

$$2. \ a_{ij} \leq 1 \text{ և } \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1 :$$

Այս հատկությունը բնական է նաև արժեքային արտահատության միջճյուղային հաշվեկշիռների դեպքում: Այն ցույց տալու համար (11.4) արտահայտությունը բաժանենք X_j -ի վրա: Կստանանք.

$$\frac{X_j}{X_j} = \sum_{i=1}^n \frac{X_{ij}}{X_j} + \frac{Z_j}{X_j}, \text{ կամ } 1 = \sum_{i=1}^n a_{ij} + \frac{Z_j}{X_j}:$$

Այս արտահայտության մեջ՝ $Z_j/X_j \geq 0$: Հակառակ դեպքում դա կնշանակի, որ $Z_j < 0$, այսինքն՝ j -րդ ճյուղում արտադրությունը վնասաբեր է, ինչը տնտեսագիտորեն բացառվում է: Հետևաբար՝ $\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$, որից էլ, հաշվի առնելով նաև առաջին պայմանը, հետևում է, որ $a_{ij} \leq 1$:

$$3. \ a_{ij} < 1, \text{ երբ } i = j :$$

Տնտեսագիտորեն այս պայմանն ակնհայտ է, քանի որ վերարտադրության գործընթացը չի կարող իրականացվել, եթե ավելի շատ արտադրանք օգտագործվում է, քան արտադրվում: Մաթեմատիկորեն՝ $a_{ii} = x_{ii}/x_i < 1$, քանի որ $x_{ii} < x_i$:

$$4. \ a_{ij} \cdot a_{ji} < 1:$$

Այս պայմանը ցույց տալու համար ենթադրենք.

$$a_{ij} \cdot a_{ji} = 1,$$

որից հետևում է՝

$$a_{ij} = a_{ji} = 1:$$

Դա էլ, իր հերթին, նշանակում է, որ i -րդ ճյուղի համախառն արտադրանքն ամբողջությամբ օգտագործվում է j -րդ ճյուղում համախառն արտադրանք արտադրելու, իսկ վերջինս ամբողջությամբ՝ i -րդ ճյուղում համախառն արտադրանք արտադրելու համար: Քանի որ տնտեսագիտորեն այդպիսի ճյուղեր գոյություն ունենալ չեն կարող, ուստի.

$$a_{ij} \cdot a_{ji} < 1:$$

11.5. ՄԻՋՅՈՒՂԱՅԻՆ ՀԱՇՎԵԿՇՈՒ՝ ԼԵՈՆՏԵՎԻ (ՀԻՄՆԱԿԱՆ) ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

Ինչպես նշել ենք, ուղղակի ծախսերի գործակիցներն են՝

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \text{ այստեղից էլ՝ } x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j: \text{ Տեղադրելով ճյուղերի հա-}$$

մախառն արտադրանքի բաշխման հավասարումների (11.1) համա-
կարգի մեջ՝ բացված ձևով կստանանք.

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n + y_1$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n + y_2$$

.....

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n + y_i$$

.....

$$x_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n + y_m$$

կամ Լեոնտևի հավասարումը, որն ունի հետևյալ տեսքը.

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i \quad i = \overline{1, n}:$$

Մատրիցային տեսքով այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ
կերպ.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}:$$

Այսպիսով՝ Լեոնտևի հավասարումը մատրիցային տեսքով
հետևյալն է.

$$X = AX + Y,$$

որտեղ X -ը համախառն արտադրանքի վեկտորն է, Y -ը՝ վերջնական արդյունքի վեկտորը, A -ն՝ ուղղակի ծախսերի գործակիցների մատրիցը:

Լեոնտևի (հիմնական) հավասարումից հետևում է՝ $X - AX = Y$, $(I - A)X = Y$, $(I - A)^{-1}(I - A)X = (I - A)^{-1}Y$, որտեղ I -ն $n \times n$ -չափանի միավոր մատրից է:

Ենթադրվում է, որ, կանխատեսելով վերջնական արդյունքի վեկտորը (Y), հնարավոր է գնահատել համախառն արտադրանքի վեկտորը (X), որն անհրաժեշտ է տվյալ վերջնական արդյունքը ստանալու համար:

11.6. ԼՐԻՎ ԾԱԽՍԵՐԻ ԵՎ ԼՐԻՎ ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԾԱԽՍԵՐԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԸ

Լրիվ ծախսերի գործակիցներ: Ինչպես նշել ենք, Լեոնտևի հավասարումից հետևում է.

$$X = (I - A)^{-1}Y: \quad (11.7)$$

Կատարենք նշանակում.

$$B = (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

ապա $X = BY$:

Եթե վերջինս ներկայացնենք բացված ձևով, ապա այն կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}: \quad (11.8)$$

Իսկ i -րդ տողի համար՝

$$x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \dots + b_{ij}y_j + \dots + b_{in}y_n = \sum_{j=1}^n b_{ij}y_j: \quad (11.9)$$

Որպեսզի պարզենք b_{ij} գործակիցների տնտեսագիտական բովանդակությունը, ենթադրենք, որ Y վեկտորը պարունակում է միայն մեկ հատ գրոյից տարբեր տարր: Օրինակ՝ j -րդ տարրը հավասար է մեկի: Այլ կերպ ասած, անհրաժեշտ է պարզել, թե j -րդ ճյուղի միավոր վերջնական արդյունք ստանալու համար որքան պետք է լինի բոլոր ճյուղերում արտադրված արտադրանքի ծավալը: Այդ դեպքում նախորդ (11.8) սխեման կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jj} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

որտեղից կստանանք.

$$x_i = b_{1j}, \quad x_2 = b_{2j}, \quad \dots, \quad x_j = b_{jj}, \quad \dots, \quad x_n = b_{nj}:$$

Այսպիսով՝ j -րդ ճյուղի միավոր վերջնական արտադրանք ստանալու համար բոլոր ճյուղերում արտադրանքը հավասար պետք է լինի $(I - A)^{-1}$ մատրիցի համապատասխան տարրերին: Այլ կերպ ասած, b_{ij} գործակիցները ցույց են տալիս, թե i -րդ ճյուղի համախառն արտադրանքից որքան է օգտագործվում j -րդ ճյուղում միավոր վերջնական արդյունք ստանալու համար: Նույնպիսի եզրակացության կարելի է հանգել, եթե (11.9)-ն ածանցենք ըստ Y_j -ի: Այդ դեպքում կստանանք՝ $\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = b_{ij}$:

$\partial x_i / \partial y_j$ մասնակի ածանցյալը ցույց է տալիս j -րդ ճյուղում լրացուցիչ միավոր վերջնական արդյունք ստանալու համար i -րդ ճյուղի համախառն արտադրանքի աճի անհրաժեշտ մեծությունը: Այդ աճը **լրիվ ծախսերի գործակիցն** է, ինչպես տնտեսագիտական գրականության մեջ ընդունված է անվանել՝ b_{ij} գործակիցները:

Լրիվ նյութական ծախսերի գործակիցներ: Մեծ տարածում է ստացել լրիվ ծախսերի գործակիցների հաշվարկումը՝ որպես ուղղակի և բոլոր կարգի անուղղակի ծախսերի գումար: Բանն այն է, որ աշխատանքի առարկաների, հիմնական կապիտալի, աշխատուժի

և այլ ռեսուրսների ու առանձին տիպի արդյունքների արտադրության միջև ճիշտ համամասնություն սահմանելու համար անհրաժեշտ են ոչ միայն ուղղակի, այլև **անուղղակի ծախսեր**¹⁴: Այս դեպքում նպատակ է դրվում որոշելու այն ծախսերի ընդհանուր մեծությունը, որն անհրաժեշտ է միավոր արտադրանք ստանալու համար:

Լրիվ ծախսերի C_{ij} գործակիցը կարելի է արտահայտել հետևյալ ձևով.

$$C_{ij} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \dots + a_{ij}^{(m)} + \dots, \quad (11.10)$$

կամ

$$C = A + A^2 + \dots + A^m + \dots$$

որտեղ $a_{ij}^{(m)}$ -ը m -րդ կարգի անուղղակի ծախսերն են:

Ներկայացնենք լրիվ ծախսերի գործակիցների ձևավորման գործընթացը j -րդ միավոր արտադրանքի արտադրության համար: Այսպես՝ j -րդ տիպի միավոր արտադրանքի վրա կատարվող առաջին կարգի անուղղակի ծախսերն են ($m=1$).

1-ին արտադրանքի համար՝

$$a_{1j}^{(1)} = a_{11}a_{1j} + \dots + a_{1k}a_{kj} + \dots + a_{1n}a_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{kj},$$

n -րդ արտադրանքի համար՝

$$a_{nj}^{(1)} = a_{n1}a_{1j} + \dots + a_{nk}a_{kj} + \dots + a_{nn}a_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{kj}:$$

Երկրորդ կարգի անուղղակի ծախսերն են ($m=2$).

1-ին արտադրանքի համար՝

$$a_{1j}^{(2)} = a_{11}a_{1j}^{(1)} + \dots + a_{1k}a_{kj}^{(1)} + \dots + a_{1n}a_{nj}^{(1)} = \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{kj}^{(1)},$$

n -րդ արտադրանքի համար՝

$$a_{nj}^{(2)} = a_{n1}a_{1j}^{(1)} + \dots + a_{nk}a_{kj}^{(1)} + \dots + a_{nn}a_{nj}^{(1)} = \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{kj}^{(1)}:$$

Ինչպես երևում է, յուրաքանչյուր հաջորդ կարգի անուղղակի ծախսերը որոշելիս բավական է նախորդ կարգի անուղղակի ծախսերի տարրերը բազմապատկել համապատասխան ուղղակի ծախսերի գործակցով: Այսպես՝ m -րդ կարգի $a_{ij}^{(m)}$ անուղղակի ծախսերը կարելի է գրել.

¹⁴ Անուղղակի են անվանում այն ծախսերը, որոնք մասնակցում են արտադրանքի արտադրությանը, բայց ոչ անմիջականորեն:

$$a_{ij}^{(m)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^{(m-1)} :$$

Լրիվ ծախսերի գործակիցը ստանալու համար (11.10)-ի մեջ տեղադրենք ստացված արտահայտությունները: Այսպիսով՝

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^{(1)} + \dots + \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^{(m-1)} + \dots = \\ &= a_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{ik} (a_{kj} + a_{kj}^{(1)} + \dots + a_{kj}^{(m-1)} + \dots), \quad m \rightarrow \infty : \end{aligned}$$

Եթե նշանակենք $a_{kj} + a_{kj}^{(1)} + \dots + a_{kj}^{(m-1)} + \dots = c_{kj}$, կստանանք

$c_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}$, որտեղ $\sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj}$ -ն բոլոր կարգի անուղղակի ծախսերի գումարն է: Մատրիցային տեսքով լրիվ նյութական ծախսերի գործակիցների C մատրիցը կարտահայտվի հետևյալ ձևով՝ $C = A + AC$:

Փորձը ցույց է տվել, որ այս եղանակով լրիվ ծախսերի գործակիցները որոշելու համար բավական է հաշվարկել մինչև երրորդ-չորրորդ կարգի անուղղակի ծախսերը:

Լրիվ ծախսերի և լրիվ նյութական ծախսերի գործակիցների համադրումը: Այսպիսով, ունենք լրիվ ծախսերի գործակիցը՝ որպես միավոր վերջնական արդյունք ստանալու համար բոլոր ճյուղերում կատարված ծախսեր և լրիվ նյութական ծախսերի գործակիցը՝ որպես ուղղակի և բոլոր կարգի անուղղակի ծախսերի գումար: Այդ երկու սահմանումների միջև կապը ցույց տալու համար վերցնենք $C = A + AC$ արտահայտությունը, որի երկու կողմերին ավելացնենք միավոր I մատրիցը և կատարենք որոշ մատրիցային ձևափոխություններ.

$$C + I = A + AC + I,$$

$$(C - AC) + (I - A) = I,$$

$$(I - A)C + (I - A) = I,$$

$$(I - A) \cdot (C + I) = I,$$

$$(I - A)^{-1} \cdot (I - A) \cdot (C + I) = (I - A)^{-1} \cdot I,$$

$$I \cdot (C + I) = (I - A)^{-1},$$

$$C + I = (I - A)^{-1}:$$

Ստացանք՝ $B = (I - A)^{-1} = C + I$:

Առանձին գործակիցների համար այն կունենա հետևյալ տեսքը.

$$b_{ij} = c_{ij} + \delta_{ij}, \text{ որտեղ } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } i \neq j \\ 1, & \text{եթե } i = j \end{cases} :$$

b_{ij} և c_{ij} գործակիցները, որպես մեծություններ, միմյանցից տարբերվում են միայն գլխավոր անկյունագծի տարրերով:

Այսպիսով՝ լրիվ ծախսերի b_{ij} գործակիցներն ընդգրկում են լրիվ արտադրական c_{ij} ծախսերը և արտադրվող միավոր արժեքով վերջնական արդյունքը:

Լրիվ ծախսերի գործակիցները բավարարում են հետևյալ պայմանները.

1. լրիվ ծախսերի գործակիցները բացասական չեն կարող լինել, այսինքն՝ $b_{ij} \geq 0$,

2. ուղղակի ծախսերի գործակիցները չեն կարող գերազանցել համապատասխան՝ լրիվ ծախսերի գործակիցներին՝ $a_{ij} \leq b_{ij}$,

3. $(I - A)^{-1}$ մատրիցի գլխավոր անկյունագծին համապատասխան լրիվ ծախսերի գործակիցները մեկից փոքր լինել չեն կարող, այսինքն՝ $b_{ij} \geq 1$, եթե $i = j$:

A և (I - A) մատրիցների հատկությունները: Միջճյուղային հաշվեկշռի մոդելն իրական տնտեսական գործընթացների արտա-ցուման արդյունք է, ուստի դրա լուծումները չեն կարող ընդունել կամայական արժեք: Տնտեսագիտական իմաստ կարող են ունենալ միայն ոչ բացասական լուծումները:

Սահմանում: A մատրիցը և դրան համապատասխան՝ միջճյուղային կապերի համակարգը կոչվում են արդյունավետ, եթե գոյություն ունի այնպիսի ոչ բացասական $X \geq 0$ վեկտոր, որ $(I - A)X = Y \geq 0$:

Հիմնական թեորեմները:

1. Եթե A մատրիցն արդյունավետ է, ապա կամայական $Y \geq 0$ վեկտորի համար $(I - A)X = Y$ համակարգն ունի միակ՝ $X \geq 0$ լուծում:

2. A մատրիցն արդյունավետ է միայն և միայն այն դեպքում, երբ $(I - A)$ մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորմները դրական են:
3. A մատրիցն արդյունավետ լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի.
 - $(I - A)$ մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորմները լինեն դրական,
 - $\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$ ՝ բոլոր j -երի համար,
 - $\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1$ ՝ գոնե մեկ j -ի համար:
4. Եթե A մատրիցն արդյունավետ է, ապա $(I - A)$ -ի դետերմինանտը դրական է, հետևաբար՝ գոյություն ունի $(I - A)^{-1}$ հակադարձ մատրիցը:
5. A մատրիցն արդյունավետ է միայն և միայն այն դեպքում, երբ $(I - A)^{-1}$ մատրիցը ոչ բացասական է:

11.7. ՈՒՂՂԱԿԻ ԵՎ ԼՐԻՎ ԱՇԽԱՏԱՏԱՐՈՒԹՅԱՆ ՈՒ ԿԱՊԻՏԱԼԱՏԱՐՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԸ ՄԻՋՃՅՈՒՂԱՅԻՆ ՀԱՇՎԵԿՇՈՒՄ

Միջոյուղային հաշվեկշռում, բացի համապատասխան կապերից, վերջնական և պայմանական զուտ արդյունքի ցուցանիշներից առանձին տողերով, երրորդ բաժնից ներքև տրվում են նաև աշխատանքային ռեսուրսների (աշխատողների թվաքանակի) և հիմնական կապիտալի ծախսերի բնութագրերը նյութական արտադրության գործընթացում: Ի տարբերություն աշխատանքի առարկաների, որոնք ամբողջությամբ օգտագործվում են արտադրության մեկ պարբերաշրջանի ընթացքում, աշխատանքային ռեսուրսները և հիմնական կապիտալը մասնակցում են արտադրության մի շարք պարբերաշրջանների: Այդ ընթացքում դրանց մեծություններն անընդհատ փոփոխվում են, ուստի այդ ցուցանիշներն արտացոլվում են միջոյուղային հաշվեկշռում՝ որպես միջինացված մեծություններ:

Միջոյուղային հաշվեկշռում ինչպես որ հաշվարկվում են ուղղակի ծախսերի գործակիցները, այնպես էլ կարելի է հաշվարկել.

1. **Աշխատանքային ռեսուրսների ուղղակի ծախսերի** (ուղղակի աշխատատարության) **գործակիցները**, որոնք ցույց են տալիս աշխատանքային ռեսուրսների պահանջը տվյալ ճյուղում միավոր համախառն արտադրանք ստանալու համար:

Դա արտահայտվում է հետևյալ ձևով.

$$l_j = \frac{h_j}{x_j} \quad j = \overline{1, n}, \quad (11.11)$$

որտեղ l_j -ն j -րդ ճյուղի ուղղակի աշխատատարության գործակիցն է, h_j -ն՝ j -րդ ճյուղում զբաղված աշխատողների միջին տարեկան թիվը:

2. Հիմնական կապիտալի ուղղակի ծախսերի (ուղղակի կապիտալատարության) **գործակիցները**, որոնք ցույց են տալիս հիմնական կապիտալի պահանջը տվյալ ճյուղում միավոր համախառն արտադրանք ստանալու համար: Դա արտահայտվում է հետևյալ ձևով.

$$k_j = \frac{p_j}{x_j} \quad j = \overline{1, n}, \quad (11.12)$$

որտեղ k_j -ն j -րդ ճյուղի ուղղակի կապիտալատարության գործակիցն է, p_j -ն՝ j -րդ ճյուղի հիմնական կապիտալի միջին տարեկան արժեքը:

Օգտվելով վերոնշյալ գործակիցներից՝ հնարավոր է որոշել աշխատանքային ռեսուրսների և հիմնական կապիտալի պահանջարկը **ծրագրային միջճյուղային հաշվեկշռում**: Հաշվի առնելով (11.11) և (11.12) բանաձևերը՝ կարող ենք գրել.

$$H = \sum_{j=1}^n l_j x_j, \quad (11.13)$$

$$K = \sum_{j=1}^n k_j x_j, \quad (11.14)$$

որտեղ H -ը աշխատանքային ռեսուրսների, իսկ K -ն՝ հիմնական կապիտալի պահանջարկն է:

Ինչպես նշել ենք, ծրագրային միջճյուղային հաշվեկշռում համախառն արդյունքը ֆունկցիա է նյութական արտադրության ճյուղերի վերջնական արդյունքների մեծությունից: Աշխատանքային ռեսուրսների և հիմնական կապիտալի պահանջարկը, կախված վերջնական արդյունքից, կարելի է որոշել, եթե տեղադրենք (11.9)-ը (11.13)-ի և (11.14)-ի մեջ.

$$H = \sum_{j=1}^n l_j \left(\sum_{k=1}^n b_{mk} y_m \right) = \sum_{m=1}^n \left(\sum_{j=1}^n l_j b_{jm} \right) y_m, \quad (11.15)$$

$$K = \sum_{j=1}^n k_j \left(\sum_{m=1}^n b_{jk} y_m \right) = \sum_{m=1}^n \left(\sum_{j=1}^n k_j b_{jm} \right) y_m \quad (11.16)$$

(11.15) բանաձևում $l_j b_{jm}$ արտադրյալը ցույց է տալիս j -րդ ճյուղի աշխատանքային ռեսուրսների այն քանակը, որն անհրաժեշտ է m -րդ ճյուղում միավոր վերջնական արդյունք արտադրելու համար:

(11.16) բանաձևի $k_j b_{jm}$ արտադրյալը ցույց է տալիս j -րդ ճյուղի հիմնական կապիտալի այն քանակը, որն անհրաժեշտ է m -րդ ճյուղում միավոր վերջնական արդյունք արտադրելու համար:

Հետևաբար՝ $\sum_{j=1}^n l_j b_{jm}$ գումարը ցույց է տալիս բոլոր ճյուղերի աշխատանքային ռեսուրսների, իսկ $\sum_{j=1}^n k_j b_{jm}$ գումարը՝ բոլոր ճյուղերի հիմնական կապիտալի այն քանակը, որն անհրաժեշտ է m -րդ տեսակի միավոր վերջնական արդյունք արտադրելու համար:

Դրանք համապատասխանում են լրիվ ծախսերի գործակցի սահմանմանը, հետևաբար՝ $\sum_{j=1}^n l_j b_{jm}$ գումարը աշխատանքային ռեսուրսների, իսկ $\sum_{j=1}^n k_j b_{jm}$ գումարը՝ հիմնական կապիտալի լրիվ ծախսերի գործակիցն է:

Այդ գործակիցների օգնությամբ հնարավոր է ստուգել վերջնական արդյունքի այս կամ այն տարբերակի թույլատրելիությունը՝ ելնելով ընթացիկ ժամանակաշրջանում աշխատուժի և հիմնական կապիտալի հնարավոր մեծություններից:

11.8. ՄԻՋՅՈՒՂԱՅԻՆ ՀԱՇՎԵԿՇՈՒ ԴԻՆԱՄԻԿ ՄՈՂԵԼՆԵՐԸ

Վերն ուսումնասիրված միջճյուղային հաշվեկշռային մոդելները **ստատիկ** են, այսինքն՝ դրանցում ցուցանիշների կախվածությունները վերաբերում են ժամանակի որոշակի պահի (հաշվետու տարի, հաշվետու տարվան նախորդող և հաջորդող տարիներ): Այս մոդելներում ժամանակի գործոնը հաշվի չի առնվում: Վերջինս

հանգեցնում է նրան, որ տնտեսության զարգացման շարժընթացը (դինամիկան) արտացոլվում է մի շարք՝ իրարից անկախ հաշվարկված մոդելներով, ինչն ակնհայտորեն որոշ չափով պարզեցնում և նեղացնում է դրանց վերլուծական հնարավորությունները: Այդպիսի պարզեցումներն առաջին հերթին բերում են այն բանին, որ ստատիկ միջճյուղային հաշվեկշիռներում չեն վերլուծվում կապիտալ ներդրումների բաշխումը, օգտագործումը և դրանց արդյունավետությունը: Կապիտալ ներդրումները դուրս են մնում արտադրության ոլորտից և սպառման առարկաների ու ոչ արտադրական ծախսերի հետ միասին ընդգրկվում են վերջնական արդյունքում:

Ի տարբերություն ստատիկ մոդելների, **դինամիկներն** արտացոլում են ոչ թե տնտեսության վիճակը, այլ դրա զարգացման գործընթացը՝ ներկայացնելով փոխկապվածությունը տնտեսության զարգացման նախորդող և հաջորդող փուլերի միջև և դրանով իսկ տնտեսամաթեմատիկական մոդելների հիման վրա վերլուծությունը մոտեցնելով տնտեսական համակարգի զարգացման իրական պայմաններին: Դինամիկ մոդելները ստատիկ միջճյուղային հաշվեկշռային մոդելների զարգացումն են, որոնցում արտադրական կապիտալ ներդրումները դուրս են բերվում վերջնական արդյունքի կազմից, ուսումնասիրվում են դրանց կառուցվածքը և ազդեցությունը արտադրության ծավալի աճի վրա: Դինամիկ մոդելների կառուցման հիմքում հաշվի է առնվում կապիտալ ներդրումների մեծության և արտադրանքի հավելաճի միջև գոյություն ունեցող մաթեմատիկական կախվածությունը: Ինչպես ստատիկ մոդելների, այնպես էլ դինամիկ համակարգի հետազոտումը հանգեցնում է արտադրության մակարդակի որոշմանը, սակայն դինամիկ մոդելներում որոշվող ծավալները պայմանավորված են նախորդող ժամանակաշրջանների արտադրական հնարավորություններով:

Դինամիկ միջճյուղային հաշվեկշռի առաջին երկու քառորդների սկզբունքային սխեման ներկայացված է աղյուսակ 11.3-ում:

Պարզ երևում է, որ մոդելն ընդգրկում է միջճյուղային հոսքերի երկու մատրից. ընթացիկ արտադրական ծախսերի մատրիցը՝ X_{ij} տարրերով, որը համընկնում է ստատիկ հաշվեկշռի համապատասխան մատրիցի հետ: Երկրորդ մատրիցի Δk_{ij} տարրերը ցույց են տալիս, թե ընթացիկ ժամանակահատվածում i -րդ ճյուղի արտադրանքից որքան է ուղղված j -րդ ճյուղի հիմնական կապիտալին՝ ներդրումների տեսքով: Նյութապես դա արտահայտվում է սպառող ճյուղերում արտադրական սարքավորումների, հոսքագծերի, ար-

տադրական հրապարակների, տրասպորտային միջոցների և այլնի հավելաճով:

Աղյուսակ 11.3

Դիմամիկ հաշվեկշռի սկզբունքային սխեման

Արտադրող ծյուղեր	Սպառող ծյուղեր												Վերջնական արդյունք	Համախառն արտադրանք
	Ընթացիկ ծախսերի միջծյուղային հոսքեր						Կապիտալ ներդրումների միջծյուղային հոսքեր							
	1	2	...	j	...	n	1	2	...	j	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	Δk_{11}	Δk_{12}	...	Δk_{1j}	...	Δk_{1n}	y'_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}	Δk_{21}	Δk_{22}	...	Δk_{2j}	...	Δk_{2n}	y'_2	x_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}	Δk_{i1}	Δk_{i2}	...	Δk_{ij}	...	Δk_{in}	y'_i	x_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nj}	...	x_{nn}	Δk_{n1}	Δk_{n2}	...	Δk_{nj}	...	Δk_{nn}	y'_n	x_n

Ստատիկ մոդելում կապիտալ ներդրումների հոսքերը չեն տարբերակվում ըստ սպառող ծյուղերի և ընդհանուր մեծությամբ են արտացոլվում յուրաքանչյուր ծյուղի y_i վերջնական արդյունքի կազմում: Դիմամիկ մոդելում y_i վերջնական արդյունքը ներառում է i -րդ ծյուղի արտադրանքը, որն ուղղվում է սպառմանը, կուտակմանը՝ ոչ արտադրական ոլորտում, շրջանառու կապիտալի հավելաճին, անավարտ արտադրությանը և արտահանմանը: Այսպիսով՝ նման մոդելում կապիտալ ներդրումների և վերջնական արդյունքի գումարը հավասար է ստատիկ հաշվեկշռի վերջնական արդյունքին.

$$\sum_{j=1}^n \Delta k_{ij} + y'_i = y_i, \quad i = \overline{1, n},$$

որտեղ y'_i -ն i -րդ ծյուղի մաքուր վերջնական արդյունքն է:

Դիմամիկ հաշվեկշռում համախառն արտադրանքի բաշխումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n \Delta k_{ij} + y'_i, \quad i = \overline{1, n}: \quad (11.17)$$

Ինչպես ստատիկ հաշվեկշռում, այնպես էլ այստեղ, ընթացիկ ծախսերի միջճյուղային հոսքերը կարելի է արտահայտել ճյուղերի համախառն արտադրանքի և ուղղակի նյութական ծախսերի գործակիցների օգնությամբ՝ $X_{ij} = a_{ij}X_j$:

Ի տարբերություն ընթացիկ ծախսերի հոսքերի, կապիտալ ներդրումների միջճյուղային հոսքերը կապված չեն թողարկվող համախառն արտադրանքի ամբողջ ծավալի հետ, այլ պայմանավորում են արտադրանքի հավելաճը. ընդ որում, դիտարկվող մոդելում ենթադրվում է, որ ընթացիկ ժամանակաշրջանի արտադրանքի հավելաճը պայմանավորված է նույն ժամանակաշրջանի կապիտալ ներդրումներով: Եթե ընթացիկ ժամանակաշրջանը նշանակենք t -ով, ապա արտադրանքի Δx_j հավելաճը հավասար է t ժամանակաշրջանի և $t-1$ ժամանակաշրջանի համախառն արտադրանքների տարբերությանը.

$$\Delta x_j = x_j^{(t)} - x_j^{(t-1)} :$$

Ենթադրելով, որ արտադրանքի հավելաճը համամասնական է արտադրական կապիտալի y_{ij} հավելաճին, կարելի է գրել.

$$\Delta k_{ij} = k_{ij} \Delta x_j, \quad i, j = \overline{1, n} : \quad (11.18)$$

Վերջին բանաձևից հետևում է.

$$k_{ij} = \frac{\Delta k_{ij}}{\Delta x_j} :$$

k_{ij} համամասնականության գործակիցների տնտեսագիտական իմաստն այն է, որ դրանք ցույց են տալիս, թե i -րդ ճյուղի արտադրանքից որքան է ներդրվում j -րդ ճյուղում արտադրական հզորությունները միավոր արտադրանքով ավելացնելու համար: Ենթադրվում է, որ արտադրական հզորություններն օգտագործվում են ամբողջությամբ և արտադրանքի հավելաճը հավասար է հզորության հավելաճին: k_{ij} -երը կապիտալատարության հավելաճի գործակիցներ են:

Օգտագործելով ուղղակի նյութական ծախսերի և կապիտալատարության հավելաճի k_{ij} գործակիցները՝ i -րդ ճյուղի համախառն արտադրանքը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} \Delta x_j + y'_i, \quad i = \overline{1, n}: \quad (11.19)$$

(11.19)-ն ներկայացնում է գծային հավասարումների համակարգ: Եթե հաշվի առնենք, որ համախառն և վերջնական արտադրանքների բոլոր ծավալները վերաբերում են որոշակի t ժամանակաշրջանի, իսկ համախառն արտադրանքի հավելածը որոշված է $(t-1)$ -րդ ժամանակաշրջանի նկատմամբ, ապա.

$$x_i^{(t)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(t)} + \sum_{j=1}^n k_{ij} (x_j^{(t)} - x_j^{(t-1)}) + y'_i^{(t)}, \quad i = \overline{1, n},$$

այստեղից էլ.

$$x_i^{(t)} = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + k_{ij}) x_j^{(t)} - \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j^{(t-1)} + y'_i^{(t)}, \quad i = \overline{1, n}: \quad (11.20)$$

Ենթադրենք՝ մեզ հայտնի են նախորդող ժամանակաշրջանում բոլոր ճյուղերի համախառն թողարկումները և t -րդ ժամանակաշրջանում ճյուղերի վերջնական արդյունքները: Այդ դեպքում (11.20) արտահայտությունը կներկայացնի t ժամանակաշրջանում n անհայտներով n գծային հավասարումների համակարգ: Այսպիսով՝ գծային հավասարումներից բաղկացած դինամիկ համակարգի լուծումը թույլ է տալիս որոշել հաջորդ ժամանակաշրջանի արտադրանքի թողարկումը՝ կախված նախորդ ժամանակաշրջանի արտադրության մակարդակից: Ժամանակաշրջանների կապն իրականացվում է ներդրումների k_{ij} գործակիցների օգնությամբ:

Դիսկրետից անցնելով անընդհատ վերլուծության՝ (11.17) համակարգի փոխարեն կունենանք.

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_j + \sum_{j=1}^n \frac{dk_{ij}}{dt} + y'_i, \quad i = \overline{1, n}:$$

Իսկ (11.18) արտահայտությունը կլինի.

$$\frac{dk_{ij}}{dt} = k_{ij} \frac{dx_j}{dt}:$$

Անընդհատ փոփոխականների դեպքի համար ստանում ենք հետևյալ համակարգը.

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} \frac{dx_j}{dt} + y'_i^{(t)}, \quad i = \overline{1, n}: \quad (11.21)$$

(11.21)-ը ներկայացնում է հաստատուն գործակիցներով առաջին կարգի n հատ գծային դիֆերենցիալ հավասարումներից բաղկացած համակարգ, որի լուծման համար, բացի ընթացիկ ուղղակի նյութական ծախսերի գործակիցների մատրիցից և կապիտալատարության հավելաճի գործակիցներից, անհրաժեշտ է ունենալ $t=0$ ժամանակի սկզբնական պահին համախառն արտադրանքի մակարդակը և վերջնական արդյունքի փոփոխման օրինաչափությունը, այսինքն՝ $y_i^{(t)}$ ֆունկցիայի տեսքը: Այդ տվյալների հիման վրա, դիֆերենցիալ հավասարումների (11.21) համակարգի համար ստացված Կոշիի խնդրի լուծմամբ, տեսականորեն ժամանակի ցանկացած պահի համար կարելի է որոշել համախառն արտադրանքի մակարդակը: Գործնականում ժամանակից կախված համախառն և վերջնական արդյունքների ֆունկցիաների նկարագրությունը կարելի է ստանալ ժամանակի հարաբերականորեն ոչ մեծ միջակայքերի համար:

Դիմամիկ մոդելում հատուկ դեր են խաղում k_{ij} կապիտալատարության հավելաճի գործակիցները, որոնք առաջացնում են n -րդ կարգի հետևյալ քառակուսային մատրիցը.

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix},$$

որի յուրաքանչյուր սյունը բնութագրում է համապատասխան j -րդ ճյուղի համար կապիտալի կազմն ու մեծությունը, որն անհրաժեշտ է դրա արտադրական հզորությունները (արտադրանքի թողարկումը) մեկ միավորով ավելացնելու համար: Կապիտալատարության հավելաճի գործակիցների մատրիցը նշանակալից դեր է խաղում կապիտալ ներդրումների վերլուծության համար:

Կապիտալատարության հավելաճի k_{ij} գործակիցները կապված են կապիտալատարության ուղղակի ծախսերի գործակիցների հետ, որոնք ցույց են տալիս, թե տվյալ տեսակի որքան կապիտալ է անհրաժեշտ ծախսել միավոր համախառն արտադրանքի թողարկման համար, իսկ k_{ij} գործակիցներն արտացոլում են կապիտալի հավելաճն արտադրանքի միավորի հավելաճի համար: Եթե արտադրող ճյուղերում տեխնիկական առաջընթացը բացակայեր,

ապա արտադրանքի միավորի հավելաճի դիմաց կապահանջվեր այնքան նոր կապիտալ, որքան միավոր արտադրանքի թողարկման համար, այսինքն՝ կապիտալատարության հավելաճի և ուղղակի ծախսերի գործակիցները կլինեին իրար հավասար: Գործնականում այդ գործակիցներն ունեն տարբեր մեծություններ, սակայն դրանց միջև գոյություն ունի որոշակի կապ, որն էլ օգտագործվում է դիմամիկ մոդելների մշակման ժամանակ, հատկապես կապված այն բանի հետ, որ կապիտալատարության վերաբերյալ հավաստի տվյալներ ստանալն ավելի հեշտ է, քան թե ներդրումների գործակիցներն անմիջականորեն հաշվելը:

11.9. ՄԻՋՅՈՒՂԱՅԻՆ ՀԱՇՎԵԿՇՈՒ ՄՈԴԵԼԸ ՈՐՊԵՍ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՄՈԴԵԼԻ ՊԱՐԶ ՏԱՐԲԵՐԱԿ

Մինչ այժմ դիտարկել ենք այն դեպքը, երբ միջոցառումները հաշվեկշռում յուրաքանչյուր ճյուղի արտադրանք արտադրվում է որպես միջինացված տեխնոլոգիական գործընթացի արդյունք: Իրականում օգտագործվում են տարբեր տեխնոլոգիական գործընթացներ, և ընթացիկ նյութական ծախսերի կառուցվածքը խիստ փոփոխվում է՝ կախված այդ գործընթացի առանձնահատկություններից: Որպեսզի միջոցառումները հաշվեկշիռն ավելի ճիշտ արտահայտի ծրագրային ժամանակաշրջանում ճյուղերի միջև տնտեսական կապերը, անհրաժեշտ է ծախսերը տարբերակել ըստ արտադրության մեջ օգտագործվող եղանակների: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր ճյուղի արտադրանք կբնութագրվի ծախսերի ոչ թե մեկ, այլ մի քանի վեկտորներով՝ կախված հնարավոր տեխնոլոգիական գործընթացների քանակից, որոնք կորոշվեն՝ ելնելով արտադրության տեխնոլոգիական սկզբունքից, օգտագործվող աշխատամիջոցներից, տարածքային, սոցիալական, կազմակերպչական և այլ առանձնահատկություններից: Այդ դեպքում ուղղակի ծախսերի գործակիցների քանակը, կախված դիտարկվող արտադրատեսակների և դրանց արտադրության եղանակների քանակից, կարող է էապես փոփոխվել:

Գոյություն ունեցող ռեսուրսների դեպքում հնարավոր է ստանալ տրված կառուցվածքով Y վերջնական արդյունք՝ տարբեր տեխնոլոգիաներով: Անհրաժեշտ է որոշել բոլոր հնարավոր լուծումներից առավել ձեռնտուն: Այդ խնդիրը կարելի է հետազոտել միջոցառումներին կապերի օպտիմալացման մոդելի օգնությամբ, որի դեպքում ձևակերպումը կլինի հետևյալը. որոշել ճյուղերում համա-

խառն արտադրանքի արտադրության այն ծավալները (հաշվի առնելով տարբեր տեխնոլոգիաների հնարավորությունը), որոնք կապահովեն վերջնական արդյունքի տրված քանակության ստացումը նվազագույն ծախսերով:

Խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելի ձևակերպման համար կատարենք հետևյալ նշանակումները. r_j -ը տեխնոլոգիայի ինդեքսն է՝ ($r_j = \overline{1, S_j}$), $a_{ij}^{(r)}$ -ը i -րդ ճյուղի արտադրանքի ուղղակի ծախսերի գործակիցն է j -րդ ճյուղի՝ r -րդ տեխնոլոգիայով միավոր համախառն արտադրանք արտադրելու համար, y_i -ն i -րդ ճյուղի վերջնական արդյունքի ծրագրային մեծությունն է, $c_j^{(r)}$ -ն r -րդ տեխնոլոգիայով j -րդ ճյուղի՝ միավոր արտադրանք ստանալու համար կատարված ծախսերն են, $x_j^{(r)}$ -ը j -րդ ճյուղի համախառն արտադրանքն է r -րդ տեխնոլոգիայով:

Խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{S_j} c_j^{(r)} x_j^{(r)} \rightarrow \min, \quad (11.22)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{S_j} (\delta_{ij} - a_{ij}^{(r)}) x_j^{(r)} \geq y_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } i \neq j \\ 1, & \text{եթե } i = j \end{cases}, \quad (11.23)$$

$$x_j^{(r)} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad r = \overline{1, S_j}: \quad (11.24)$$

Խնդրի նպատակային ֆունկցիան արտահայտում է ծախսերի գումարային մեծությունը:

Տնտեսամաթեմատիկական մոդելին համապատասխանող երկակին (11.25)-(11.27) պայմաններով խնդիրն է.

$$\sum_{i=1}^n y_i u_i \rightarrow \max, \quad (11.25)$$

$$\sum_{i=1}^n (\delta_{ij} - a_{ij}^{(r)}) \cdot u_i \leq c_j^{(r)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad r = \overline{1, S_j}, \quad (11.26)$$

$$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}: \quad (11.27)$$

Ըստ երկակիության լեմմա 1-ի՝ $\sum_{i=1}^n y_i u_i \leq \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{S_j} c_j^{(r)} x_j^{(r)}$, ըստ երկակիության 1-ին թեորեմի՝ երկակի խնդիրների օպտիմալ լուծումների համար տեղի ունի՝ $\sum_{i=1}^n y_i u_i^* = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{S_j} c_j^{(r)} x_j^{*(r)}$: Հետևաբար՝ եթե վերջնական արդյունքը գնահատվում է օպտիմալ գնահատականներով, ապա միայն օպտիմալ համախառն արտադրանքի տարբերակն ընտրելու դեպքում կորուստներ չեն լինի:

Ըստ երկակիության 2-րդ թեորեմի՝ u_i^* և $x_j^{*(r)}$ օպտիմալ լուծումների համար գործում են հետևյալ համակարգերը.

$$\left[\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{S_j} (\delta_{ij} - a_{ij}^{(r)}) x_j^{*(r)} - y_i \right] \cdot u_i^* = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\left[c_j^{(r)} - \sum_{i=1}^n (\delta_{ij} - a_{ij}^{(r)}) \cdot u_i^* \right] \cdot x_j^{*(r)} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad r = \overline{1, S_j} :$$

Այսպիսով՝ եթե վերջնական i արդյունքի u_i^* օպտիմալ գնահատականը դրական է, միայն այդ դեպքում y_i արտադրության ժամանակ կորուստներ չեն լինի: Եթե օպտիմալ լուծման համար արտադրվում է համախառն արտադրանք՝ r -րդ տեխնոլոգիայով, ապա ստացված արդյունքը, գնահատված օպտիմալ գնահատականներով, համարժեք է $c_j^{(r)}$ կատարված ծախսերին:

11.10. ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐՈՎ ՄԻՋՃՅՈՒՂԱՅԻՆ ՀԱՇՎԵԿՇՈՒ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՄՈԴԵԼԸ

Տնտեսությունում վերջնական արդյունքի ծրագրային առաջադրանքի կատարման ապահովումը պայմանավորված է գոյություն ունեցող ռեսուրսներով: Քանի որ ռեսուրսների քանակը սահմանափակ է, հետևաբար՝ դա ևս պետք է հաշվի առնել: Խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելը սահմանափակ ռեսուրսների դեպքում կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{S_j} c_j^{(r)} x_j^{(r)} \rightarrow \min, \quad (11.28)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{S_j} (\delta_{ij} - a_{ij}^{(r)}) \cdot x_j^{(r)} \geq \overline{y_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11.29)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{S_j} b_{jl}^{(r)} x_j^{(r)} \leq R_l, \quad l = \overline{1, m}, \quad (11.30)$$

$$x_j^{(r)} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad r = \overline{1, S_j}, \quad (11.31)$$

որտեղ r_j -ը տեխնոլոգիայի ինդեքսն է՝ ($r_j = \overline{1, S_j}$), $a_{ij}^{(r)}$ -ը՝ i -րդ ճյուղի արտադրանքի ուղղակի ծախսերի գործակիցը j -րդ ճյուղի միավոր համախառն արտադրանքը r -րդ տեխնոլոգիայով արտադրելու համար, y_i -ն i -րդ ճյուղի վերջնական արդյունքի ծրագրային մեծությունն է, $c_j^{(r)}$ -ն՝ r -րդ տեխնոլոգիայով j -րդ ճյուղի միավոր արտադրանք ստանալու համար կատարված ծախսերը, l -ը սահմանափակ ռեսուրսների ինդեքսն է, $b_{jl}^{(r)}$ -ը l -րդ ռեսուրսի ծախսն է r -րդ տեխնոլոգիայով j -րդ տեսակի միավոր համախառն արտադրանք ստանալու համար, R_l -ը l -րդ ռեսուրսի ծավալն է, $x_j^{(r)}$ -ն j -րդ ճյուղի համախառն արտադրանքն է՝ r -րդ տեխնոլոգիայով:

Տնտեսամաթեմատիկական մոդելում անհայտները հետևյալն են՝ $x_1^{(r)}(r = \overline{1, S_1})$, $x_2^{(r)}(r = \overline{1, S_2})$, ..., $x_n^{(r)}(r = \overline{1, S_n})$, այսինքն՝ անհայտների քանակը հավասար է. $S_1 + S_2 + \dots + S_n$:

Սողելում առաջնությունը տրվում է այնպիսի տեխնոլոգիաներին, որոնց միջոցով արտադրվում է վերջնական արդյունքը (11.29) նվազագույն ծախսերով (11.28)՝ ընդ որում, չգերազանցելով հումքի ծավալը (11.30):

11.11. ՁԵՌՆԱՐԿՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼԸ

Ձեռնարկության արտադրաֆինանսական գործունեության կառավարումը պահանջում է մեծածավալ տեղեկատվության մշակում: Տնտեսամաթեմատիկական մեթոդների կիրառմամբ ոչ միայն հնարավորություն է ընձեռնվում մեծացնելու կառավարման օպերատիվությունը, այլև ստանալու արդյունավետ տարբերակներ: Դիտարկենք ձեռնարկությունների արտադրաֆինանսական կառավարման մատրիցային մոդելը, որի հիմքում միջճյուղային հաշվեկշռի կառուցման սկզբունքն է: Այս մոդելում վերլուծության են ենթարկվում ոչ թե տնտեսության նյութական արտադրության ճյուղերը, այլ տվյալ ձեռնարկության արտադրական կառուցվածքը՝ հիմնական և օժանդակ արտադրամասերը, դրանց կողմից թողարկվող միջանկյալ և պատրաստի արտադրանքը:

Մատրիցային մոդելը, ինչպես միջճյուղային հաշվեկշիռը, բաղկացած է 4 քառորդից, որոնք էլ, իրենց հերթին, ունեն ենթաբաժիններ: Այն կարող է կառուցվել ինչպես բնաիրային, այնպես էլ արժեքային չափման միավորներով: *I* քառորդում արտացոլվում են ինչպես հիմնական, այնպես էլ օժանդակ արտադրամասերի միջև գոյություն ունեցող արտադրական կապերը՝ տվյալ ձեռնարկությունում ընդունված դասակարգման համաձայն:

Ձեռնարկության կառավարման մատրիցային մոդելի սխեման արտացոլված է աղյուսակ 12.1-ում:

X_{11} -ը բնութագրում է հիմնական արտադրամասերի միջև գոյություն ունեցող փոխկապվածությունները, X_{12} -ը՝ հիմնական արտադրամասերի կապն օժանդակ սպասարկող արտադրամասերի հետ, X_{21} -ը՝ օժանդակ սպասարկող արտադրամասերի կապը հիմնական արտադրամասերի հետ, X_{22} -ը՝ օժանդակ սպասարկող արտադրամասերի միջև փոխկապվածությունները:

Սխեմայի *II* քառորդը բնութագրում է ձեռնարկության գործունեության արդյունքները: Այստեղ արտացոլվում են ձեռնարկության ապրանքային արտադրանքը և ինչպես հիմնական, այնպես էլ օժանդակ արտադրամասերի համախառն շրջանառությունը: Երբեմն այս քառորդներում ներկայացվում են նաև անավարտ արտադրանքի մնացորդը, պատվիրատուի նյութերի արժեքը, իրացված թափոնները և այլն: Որպես կանոն, ապրանքային արտադրանքը հիմնական արտադրամասերի գործունեության արդյունքն է, այդ պատճառով էլ *II* քառորդում լրացվում է միայն Y_1 -ը:

Աղյուսակ 11.4

<i>Ծախսեր</i>		<i>I քառորդ</i>		<i>II քառորդ</i>	
		<i>Հիմնական արտադրանք</i>	<i>Օժանդակ արտադրանք</i>	<i>Ապրանքային արտադրանք</i>	<i>Համախառն շրջանառություն</i>
<i>Թողարկում</i>	Հիմնական	X_{11}	X_{12}	Y_1	X_1
	Օժանդակ	X_{21}	X_{22}		X_2
	Դրսից ստացվող հումքի, նյութի, վառելիքի անվանացանկ	D_1	D_2		(d_p)
Ամորտիզացիա	Արտադրական սարքավորումների հիմնական խմբեր	F_1	F_2		(f_r)
Աշխատավարձ	Աշխատողների հիմնական մասնագիտական խմբեր	T_1	T_2		(t_l)

Նշանակենք X_{ij} -ով հիմնական կամ օժանդակ սպասարկող արտադրամասերի i -րդ տեսակի արտադրանքի ծավալը, որը պահանջվում է j -րդ տեսակի արտադրանք արտադրելու համար: Այդ դեպքում կունենանք հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad (11.32)$$

որտեղ x_i -երը համախառն արտադրանքի X_1 , X_2 վեկտորների

բաղադրիչներն են, y_i -երը՝ Y_1 վեկտորինը: $\sum_{j=1}^n x_{ij}$ -ը ցույց է տալիս

i -րդ արտադրանքի ներգործարանային շրջանառությունը:

(11.32)-ը ցույց է տալիս, որ i -րդ արտադրանքի համախառն թողարկումը որոշվում է որպես տվյալ արտադրանքի ներգործարանային շրջանառության և ապրանքային արտադրանքի գումար:

Մատրիցային մոդելում հատուկ նշանակություն ունի *III* քառորդը, որտեղ արտացոլված են դրսից ստացվող կիսաֆաբրիկատների, հումքի, նյութերի, էներգիայի պահանջարկը, ինչպես նաև հիմնական արտադրական կապիտալի և աշխատանքային ռեսուրսների սպառումը:

III քառորդը ներկայացված է 3 խումբ մատրիցներով՝ (D, F, T) , որտեղ D -ն $D = d_{pj}$ նյութատեսիկական մատակարարման մատրիցն է: Դրա տարրերը ցույց են տալիս ռեսուրսի ծախսը հիմնական (D_1 ենթամատրից) և օժանդակ սպասարկող (D_2 ենթամատրից) արտադրություններում: *III* քառորդի հաջորդ ենթամատրիցը՝ $F = f_{rj}$, կապիտալինն է: Այստեղ, ըստ տողերի, ներկայացվում են արտադրական սարքավորումների հիմնական խմբերը: F_1 և F_2 ենթամատրիցների տարրերը ցույց են տալիս մեքենասարքավորումների աշխատաժամանակի ծախսը համապատասխանաբար՝ հիմնական և օժանդակ արտադրություններում: *III* քառորդի $T = t_{ij}$ աշխատանքային ենթամատրիցում տրվում են հիմնական և օժանդակ արտադրություններում աշխատանքային ծախսերն ըստ աշխատողների մասնագիտական որակավորման խմբերի:

Սողելի *IV* քառորդում արտացոլվում է դրսում ուղղակի ձևով իրացումը, և այդ քառորդն առավելապես չի լրացվում:

Եթե մատրիցային մոդելը կառուցված է բնաիրային ցուցանիշներով, ապա այդ դեպքում *I* քառորդում արտացոլվում է արտադրամասում դետալների կամ հանգույցների շարժը համապատասխան տեխնոլոգիական գործընթացի բնաիրային չափման միավորներով: *II* քառորդը պարունակում է համախառն և ապրանքային թողարկումը, իսկ *III* քառորդը՝ բոլոր տիպի արտադրական ռեսուրսների ծախսը՝ նույնպես բնաիրային տեսքով:

Եթե մատրիցային մոդելը կառուցված է արժեքային ցուցանիշներով, ապա կունենանք ձեռնարկության արժեքային տնտեսամաթեմատիկական մոդել: Այն իր կառուցվածքով ամբողջովին համընկնում է տեխնոլոգիական մոդելի հետ:

Տեխնոլոգիական բնաիրային մոդելից կարելի է անցնել տնտեսականի՝ բնաիրային գներով, տարիֆային դրույքներով և ամորտիզացիոն հատկացումների նորմաներով: Այս դեպքում տնտեսական հաշվարկների համար կարևոր նշանակություն ունի միավոր արտադրանքի վրա կատարվող ծախսերի նորմատիվային ցուցանիշներով կազմված մոդելը:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները. a_{ij} -ն i -րդ տեսակի արտադրանքի ծախսն է (ըստ *I* քառորդի անվանացանկի) j -րդ տեսակի միավոր արտադրանք արտադրելու համար:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} : \quad (11.34)$$

d_{pj} -ն j -րդ արտադրանքի միավորի արտադրության վրա p -րդ նյութական ռեսուրսի ծախսն է, f_{rj} -ն j -րդ արտադրանքի միավորի արտադրության վրա r -րդ սարքավորման ժամանակի ծախսն է, t_{lj} -ն j -րդ արտադրանքի միավորի արտադրության վրա l -րդ մասնագիտական որակավորման խմբի աշխատողների աշխատանքային ծախսերն են՝ մարդ-ժամերով արտահայտված:

Այս նշանակումների դեպքում կունենանք հետևյալ հաշվեկշռային հավասարումները.

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad (11.35)$$

$$d_p = \sum_{j=1}^n d_{pj} x_j, \quad (11.36)$$

որտեղ d_p -ն դրսից ստացվող p -րդ տեսակի նյութական ռեսուրսի նկատմամբ պահանջարկն է,

$$f_r = \sum_{j=1}^n f_{rj} x_j, \quad (11.37)$$

որտեղ f_r -ն r -րդ խմբի սարքավորումների՝ ժամանակի նկատմամբ պահանջարկն է,

$$t_l = \sum_{j=1}^n t_{lj} x_j, \quad (11.38)$$

որտեղ t_{lj} -ն l -րդ մասնագիտական որակավորման խմբի աշխատանքային ժամանակի պահանջարկն է:

Ուղղակի ծախսերի գործակիցները կարող են հաշվարկվել ինչպես բնեղեն, այնպես էլ արժեքային արտահայտությամբ:

ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

12.1. ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՏՆՏԵՍԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ

1. Ըստ նպատակային ֆունկցիայի՝ օպտիմալացման մոդելները դասակարգվում են.

- նպատակային ֆունկցիան ձգտում է առավելագույն արդյունքի (հասույթ, եկամուտ, շահույթ և այլն),
- նպատակային ֆունկցիան ձգտում է նվազագույն ծախսի (աշխատանքային ռեսուրսների ծախս, ժամանակի ծախս և այլն):

2. Ըստ ժամանակի գործոնի՝ մոդելները լինում են.

- ստատիկ,
- դինամիկ:

Ստատիկ մոդելներում որոշվում է արդյունքը ժամանակի որոշակի պահի համար, իսկ դինամիկ մոդելներում, որպես կանոն՝ ոչ միայն վերջնական, այլև միջանկյալ արդյունքը:

3. Ըստ անհայտների տեսքի՝ մոդելները դասակարգվում են որպես.

- անընդհատ փոփոխականներով,
- դիսկրետ փոփոխականներով,
- ամբողջաթիվ փոփոխականներով (նախորդի մասնակի դեպք),
- մասամբ ամբողջաթիվ փոփոխականներով (խառը դեպք):

4. Ըստ ստացված արդյունքի՝ մոդելները լինում են.

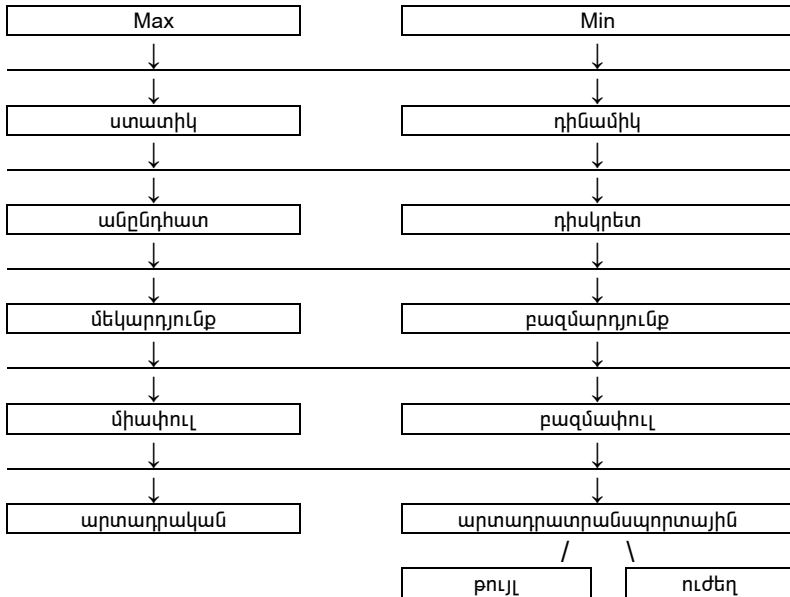
- մեկարդյունք,
- բազմարդյունք:

5. Ըստ լուծման գործընթացի՝ մոդելները լինում են.

- միափուլ,
- բազմափուլ:

Արտադրական խնդիրները ձևակերպվում են որպես զուտ արտադրական և արտադրատրանսպորտային: Արտադրատրանսպորտային խնդիրներն իրենց հերթին լինում են **տրանսպորտային գործոնի թույլ կամ ուժեղ ազդեցությամբ:**

Ներկայացնենք մոդելների դասակարգումն ըստ գծապատկերի.



12.2. ԲԱԶՄԱՐԴՅՈՒՆՔ, ԱՆԸՆԴՅԱՏ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՍՏԱՏԻԿ ՄՈԴԵԼԸ

Տնտեսամաթեմատիկական մոդելը կառուցելու համար կատարենք հետևյալ նշանակումները. j -ով նշանակենք արտադրական օբյեկտների ինդեքսը ($j = \overline{1, n}$), i -ով՝ օգտագործվող հումքերի ($i = \overline{1, m_1}$) և ստացվող արտադրանքների ($i = \overline{m_1 + 1, m}$) ինդեքսները, r -ով՝ j -րդ օբյեկտում օգտագործվող տեխնոլոգիական եղանակի ինդեքսը ($r = \overline{1, R_j}$):

Արտադրաեղանակը բնութագրվում է հետևյալ վեկտորով.

$$\{a_{1j}^r, a_{2j}^r, \dots, a_{ij}^r, \dots, a_{m_1j}^r, a_{m_1+1j}^r, \dots, a_{mj}^r, c_j^r\}$$

որտեղ a_{ij}^r -ը ($i \leq m_1$) ցույց է տալիս, թե որքան է օգտագործվում i -րդ հումքից j -րդ օբյեկտում, եթե կիրառվում է r -րդ տեխնոլոգիական եղանակը միավոր ինտենսիվությամբ, իսկ a_{ij}^r -ը ($i \geq m_1$)՝ թե որքան է ստացվում i -րդ արտադրանքից j -րդ օբյեկտում, եթե կիրառվում է r -րդ տեխնոլոգիական եղանակը միավոր ինտենսիվությամբ: C_j^r -ը որակի գնահատականն է և ցույց է տալիս, թե j -րդ օբյեկտում որքան հասույթ (եկամուտ, շահույթ) է ստացվում կամ որքան ծախսեր են կատարվում, եթե կիրառվում է r -րդ տեխնոլոգիական եղանակը միավոր ինտենսիվությամբ: X_j^r -ն արտադրվում է j -րդ օբյեկտում r -րդ տեխնոլոգիական եղանակի կիրառման ինտենսիվությունը: a_i -ն i -րդ հումքի քանակն է (պաշարը), իսկ b_i -ն՝ i -րդ արտադրանքի նկատմամբ պահանջարկը:

Տվյալ խնդրի տնտեսամաթեմատիկական մոդելն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^R c_j^r x_j^r \rightarrow \max(\min), \quad (12.1)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^R a_{ij}^r x_j^r \leq a_i, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad (12.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^R a_{ij}^r x_j^r \geq b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}, \quad (12.3)$$

$$x_j^r \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{1, R}: \quad (12.4)$$

Նպատակային ֆունկցիան ցույց է տալիս գումարային ծախսերը կամ արդյունքը, (12.2)-ը՝ թե որքան է օգտագործվում i -րդ հումքից բոլոր օբյեկտներում, իսկ (12.3)-ը՝ թե որքան է ստացվում i -րդ արտադրանքից բոլոր ոլորտներում:

Եթե $m = m_1 + 1$, ապա կունենանք մեկարդյունք մոդել:

Եթե խնդիրն ունի դիսկրետ փոփոխականներ, ապա նշված տնտեսամաթեմատիկական մոդելում (12.4)-ը կփոխարինվի հետևյալ պայմաններով.

$$\sum_{r=1}^R x_j^r = 1,$$

$$x_j^r = \begin{cases} 0, & \text{եթե } j\text{-րդ օբյեկտը չի մտնում օպտիմալ ծրագիր } r\text{-րդ} \\ & \text{տեխնոլոգիական եղանակով,} \\ 1, & \text{եթե } j\text{-րդ օբյեկտը մտնում է օպտիմալ ծրագիր } r\text{-րդ} \\ & \text{տեխնոլոգիական եղանակով:} \end{cases}$$

12.3. ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ԽՆԴՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

Ուժի մեջ պահենք նախորդ խնդրի նշանակումները: Արտադրական խնդրի դինամիկ մոդելը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\max(\min) \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+E_n)^t} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{R_j} c_j^{rt} x_j^{rt}, \quad (12.5)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{R_j} a_{ij}^{rt} x_j^{rt} \leq a_i^t, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (12.6)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{R_j} a_{ij}^{rt} x_j^{rt} \geq b_i^t, \quad i = \overline{m_1+1, m}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (12.7)$$

$$x_j^{rt} \geq 0, \quad r = \overline{1, R_j}, \quad t = \overline{1, T}: \quad (12.8)$$

Արտադրատեղանակը t -րդ տարում կնկարագրվի հետևյալ վեկտորով.

$$\{a_{1j}^{rt}, \dots, a_{ij}^{rt}, \dots, a_{m_1j}^{rt}, a_{m_1+1j}^{rt}, \dots, a_{mj}^{rt}, c_j^{rt}\}$$

որտեղ a_{ij}^{rt} -ն ցույց է տալիս, թե որքան է ծախսվում i -րդ հումքից ($i \leq m_1$) կամ ստացվում i -րդ արտադրանքից ($i \geq m_1+1$) j -րդ օբյեկտում, t -րդ տարում, եթե արտադրության ժամանակ կիրառվում է r -րդ տեխնոլոգիական եղանակը միավոր ինտենսիվությամբ:

Ներկայացվածը բազմարդյունք, անընդհատ փոփոխականներով դինամիկ մոդել է: Խնդրի նպատակային ֆունկցիան արտացոլում է ըստ տարիների գումարային արդյունքը, որտեղ կիրառվել է դիսկոնտի ֆունկցիա: (12.6) սահմանափակումը ցույց է տալիս, որ չպետք է գերազանցվի սպառման նպատակով ձեռք բերված i -րդ հումքի քանակը t -րդ տարում: (12.7) սահմանափակումը t -րդ տարում պատվերի կատարման պահանջն է:

12.4. ՄԻՋԱՆՑԻԿ ՄՈՏԵՑՈՒՄԸ ԴԻՆԱՄԻԿ ԱՐՏԱԴՐԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼՈՒՄ

Եթե օբյեկտներում հնարավոր չէ փոխել արտադրատեղանակը, այսինքն՝ արտադրությունը չունի համապատասխան ճկունություն, ապա խնդիրը ձևակերպվում է միջանցիկ ձևով:

Այդ դեպքում արտադրատեղանակի վեկտորն արտահայտվում է հետևյալ կերպ.

$$\{a_{1j}^{r1}, \dots, a_{mj}^{r1}, \dots, a_{1j}^{rT}, \dots, a_{mj}^{rT}, \bar{c}_j^r\},$$

$$\bar{c}_j^r = \sum_{t=1}^T \frac{1}{(1 + E_n)^t} c_j^{rt},$$

որտեղ $\bar{c}_j^r$ -ը T տարիների ընթացքում ընդհանուր որակի գնահատականն է:

Այս դեպքում տնտեսամաթեմատիկական մոդելը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\max(\min) \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{R_j} \bar{c}_j^t x_j^{rt}, \quad (12.9)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{R_j} a_{ij}^{rt} x_j^{rt} \leq a_i^t, \quad i = \overline{1, m_1}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (12.10)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{R_j} a_{ij}^{rt} x_j^{rt} \geq b_i^t, \quad i = \overline{m_1 + 1, m}, \quad t = \overline{1, T}, \quad (12.11)$$

$$x_j^{rt} \geq 0, \quad r = \overline{1, R_j}, \quad t = \overline{1, T}: \quad (12.12)$$

Եթե մոդելը մեկարդյունք է, ապա $m = m_1 + 1$:

Խնդրի տվյալ դրվածքն ունի հետևյալ առավելությունը. պետք չէ փոփոխել արտադրատեղանակն ըստ որոշակի համգամանքների:

Դիմանիկ խնդիրներում հիմնական դժվարությունն այն է, որ բարդանում են խնդրի ձևակերպումը և մոդելի կառուցումը: Օրինակ՝ անհրաժեշտ է լինում կանխատեսել հումքի ստացումն ըստ տարիների՝ (a_i^t) և հումքի ծախսն ըստ տարիների՝ (a_{ij}^{rt}) :

12.5. ԱՐՏԱԴՐԱՏՐԱՆՍՊՈՐՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Արտադրատրանսպորտային խնդիրներում, բացի արտադրա-եղանակը որոշելուց, անհրաժեշտ է նաև բացահայտել կա՛մ հումքի, կա՛մ պատրաստի արտադրանքի (կա՛մ էլ երկուսը միասին) տեղա-փոխման ծրագիրը նվազագույն ծախսերով: Արտադրատրանսպոր-տային խնդիրները լինում են տրանսպորտային գործոնի թույլ կա՛մ ուժեղ ազդեցությամբ:

Տրանսպորտային գործոնի թույլ ազդեցությամբ արտադրա-տրանսպորտային խնդիրը ներկայացնում է այնպիսի խնդիր, որ-տեղ տարբեր ուղղություններով տեսակարար տրանսպորտային ծախսերի առավելագույն տարբերությունը փոքր է տարբեր ար-տադրական կետերում տեսակարար արտադրական ծախսերի առավելագույն տարբերությունից: Այս տիպի խնդիրները լուծվում են առանձին. նախ՝ լուծվում է արտադրական խնդիրը, որոշվում արտադրական կետերի օպտիմալ հզորությունները, իսկ այնուհե-տև՝ տրանսպորտայինը՝ որպես արտադրական կետերում արտա-դրված արտադրանքի օպտիմալ տեղափոխման խնդիր:

Ի տարբերություն տրանսպորտային գործոնի թույլ ազդեցու-թյամբ կազմված արտադրատրանսպորտային խնդրի, տրանսպոր-տային գործոնի ուժեղ ազդեցությամբ խնդրում տարբեր ուղղու-թյուններով տեսակարար տրանսպորտային ծախսերի առավելա-գույն տարբերությունը մեծ կա՛մ հավասար է տարբեր արտադրա-կան կետերում տեսակարար արտադրական ծախսերի առավելա-գույն տարբերությունից: Այս տեսքի խնդիրները լուծվում են որպես մեկ միասնական, ինչն ավելի դժվար է:

Ենթադրենք՝ ունենք m հատ արտադրական կետեր, որոնք թո-ղարկում են համասեռ կա՛մ մեկ տեսակի արտադրանք: Արտադ-րական կետերում արտադրված արտադրանքը տեղափոխվում է սպառման կետեր՝ բավարարելու սպառողների պահանջարկը:

Կատարենք հետևյալ նշանակումները. i -ն արտադրական կե-տերի ինդեքսն է ($i = \overline{1, m}$), j -ն՝ սպառման կետերի ինդեքսը ($j = \overline{1, n}$), a_i -ն i -րդ արտադրական կետի առավելագույն հնարավոր կա՛մ նոր կառուցվող ձեռնարկության նախագծային հզորությունն է, b_j -ն

j -րդ սպառման կետի պահանջարկն է, C_{ij} -ն՝ i -րդ արտադրական կետում միավոր արտադրանքի արտադրության և այն j -րդ սպառ-ման կետ տեղափոխելու ծախսերը՝ հաշվարկված հետևյալ բա-նաձևով.

$$c_{ij} = s_i + E_n k_i + t_{ij},$$

որտեղ s_i -ն i -րդ արտադրական կետում միավոր արտադրանքի արտադրության ընթացիկ ծախսերն են, E_n -ը կապիտալ ներդրումների համեմատական արդյունավետության գործակիցն է, k_i -ն i -րդ արտադրական կետում միավոր արտադրանքի արտադրության համար պահանջվող տեսակարար կապիտալ ներդրումներն են, t_{ij} -ն i -րդ արտադրական կետից j -րդ սպառման կետ միավոր արտադրանքի տեղափոխման տրանսպորտային ծախսերն են: Միաժամանակ X_i -ն i -րդ արտադրական կետում արտադրված, իսկ X_{ij} -ն նույն տեղում արտադրված և j -րդ սպառման կետ տեղափոխվող արտադրանքի քանակությունն է:

Այս խնդրի նպատակն է որոշել, թե որքան արտադրել յուրաքանչյուր արտադրական կետում և ինչպես կազմակերպել արտադրանքի տեղափոխումը մինչև սպառման կետեր, որպեսզի նվազագույն լրիվ արտադրատրանսպորտային ծախսերով բավարարվեն բոլոր սպառողների պահանջարկներն արտադրված արտադրանքի իրացման հաշվին:

Վերջինիս տնտեսամաթեմատիկական մոդելն է.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (12.13)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \leq a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (12.14)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (12.15)$$

$$x_{ij} \geq 0: \quad (12.16)$$

Սա անընդհատ փոփոխականներով արտադրատրանսպորտային ստատիկ մոդել է:

Ֆիրման միկրոէկոնոմիկայի տեսության հիմնական օբյեկտներից մեկն է, որը բնորոշվում է որպես հետազայում վաճառելու նպատակով որևէ արտադրանք պատրաստելու կամ ծառայություն մատուցելու համար արտադրության գործոնների (հող, աշխատանք, կապիտալ և այլն) ծախսեր իրականացնող կազմակերպություն:

Հաշվի առնելով արտադրության համար անհրաժեշտ, ծախսվող գործոնները, դրանց և արտադրանքի վաճառքի տրված գները՝ ֆիրմայի համար տնտեսության **ռացիոնալ** վարման խնդիրը հանգում է իր կողմից արտադրվածի **ծավալի որոշմանը**: Արտադրանքի ծավալի և անհրաժեշտ արտադրական գործոնների ծախսերի միջև եղած կապը ընդունված է ներկայացնել գործոնների ծախսերի տարածության ցանկացած՝ $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ կետին միակ առավելագույն q ծավալի արտադրանքը՝ արտադրական այդ ծախսերից կախված մեզ հայտնի՝ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **արտադրական ֆունկցիան** համապատասխանեցնելու միջոցով. $q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

Բնական է ենթադրել, որ ցանկացած j -րդ արտադրական ծախսի x_j -ի աճը չի կարող հանգեցնել արտադրանքի q ծավալի

նվազման, այսինքն՝ $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, իսկ $\frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_j^2} < 0$,

$j=1, 2, \dots, n$, որը նշանակում է, որ x_j ծախսի աճի դեպքում, չնայած q -ն աճում է, բայց աճի տեմպը դանդաղում է:

Կատարված ենթադրությունների դեպքում $f(\bar{x})$ արտադրական ֆունկցիան գոգավոր է, հետևաբար՝ դրան համապատասխանող Հեսսեի սիմետրիկ մատրիցը՝

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix},$$

բացասական որոշյալ է, այսինքն՝ $\bar{X} \cdot H \cdot \bar{X}^T < 0$, եթե $\bar{X} \neq 0$, իսկ X^T -ն $\bar{X}$ տող վեկտորի սյան տեսքով գրված՝ տրանսպոնացված վեկտորն է:

13.1. ՖԻՐՄԱՅԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՆՈՐԴԱՍԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼԸ

Սինչ մոդելը ներկայացնելը կատարենք հետևյալ նշանակումները. P ՝ ֆիրմայի արտադրանքի գին, w_j ՝ j -րդ արտադրական գործոնի գին, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ՝ ֆիրմայի արտադրական ֆունկցիա, $\Pi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ՝ ֆիրմայի շահույթ:

Ֆիրմայի խնդիրն է տրված գների դեպքում առավելագույն շահույթ երաշխավորող արտադրական q^* ծավալի որոշումը: Երկարատև ժամանակահատվածում ծրագրավորման դեպքում խնդրի օպտիմալացման **մոդելը** կլինի.

$$\max \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = P \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^n w_j x_j, \quad (13.1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0: \quad (13.2)$$

Ինչպես արդեն նշվել էր, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ արտադրական ֆունկցիան գոգավոր է, իսկ $\sum_{j=1}^n w_j x_j$ -ը՝ գծային, ուստի (13.1)-(13.2) խնդիրը ուռուցիկ ծրագրավորման է, հետևաբար՝ դրա $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ լավագույն լուծման համար Կուն-Թակերի՝

$$P \cdot \frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_j} \begin{cases} \leq w_j, & \text{եթե } x_j^* \geq 0 \\ = w_j, & \text{եթե } x_j^* > 0 \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (13.3)$$

պայմաններն ինչպես անհրաժեշտ են, այնպես էլ՝ բավարար:

Նախապես բացատրելով այն գործոնների դիտարկումը, որոնք բացակայում են (13.1)-(13.2) խնդրի լավագույն լուծման մեջ՝ ($x_j^* = 0$), կարելի է ենթադրել, որ լավագույն լուծման մեջ $x_j^* > 0$, $j=1, 2, \dots, n$: Նշանակելով $q^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ՝ Կուն-Թակերի պայմանները կընդունեն հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} P \cdot \frac{\partial f(\bar{x}^*)}{\partial x_j} - w_j = 0 & j=1, 2, \dots, n: \\ q^* = f(\bar{x}^*) \end{cases} \quad (13.4)$$

Դիտարկելով $\bar{X}^*(P, w_1, w_2, \dots, w_n)$, $q^* = f(x^*(P, w))$ ՝ հետազոտենք $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ -ի և q^* -ի զգայունությունները, կախված $P, w_1, w_2, \dots, w_n$ գներից, որի համար հարկ է որոշել՝

$$\frac{\partial q^*}{\partial p}, \left(\frac{\partial x^*}{\partial p} \right)^T = \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p}, \frac{\partial x_2^*}{\partial p}, \dots, \frac{\partial x_n^*}{\partial p} \right), \left(\frac{\partial q^*}{\partial w} \right)^T = \left(\frac{\partial q^*}{\partial w_1}, \frac{\partial q^*}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial q^*}{\partial w_n} \right)$$

տող վեկտորները և (13.5) մատրիցը:

$$\frac{\partial \bar{X}^*}{\partial w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_i^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_i^*}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial x_i^*}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_n} \end{pmatrix} : \quad (13.5)$$

Ածանցելով (13.4)-ի $(n+1)$ նույնություններն ըստ P -ի՝ կունենանք $(n+1)$ անհայտներով $(n+1)$ հավասարումների հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} \frac{\partial q^*}{\partial p} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p} \\ \frac{\partial f}{\partial x_j} + P \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k^*}{\partial p} = 0 \quad j=1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (13.6)$$

Նշանակելով $\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ (13.6) համակարգը կարելի է ներկայացնել հետևյալ մատրիցային տեսքով.

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & P \cdot H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial q^*}{\partial p} \\ \frac{\partial x^*}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \end{bmatrix} \quad (13.7)$$

Քանի որ H -ը գոգավոր $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ արտադրական ֆունկցիային համապատասխանող՝ ճեսսեի սիմետրիկ մատրիցն է, որը բացասական որոշյալ է, ապա կարելի է ցույց տալ, որ գոյություն ունի H^{-1} հակադարձ մատրիցը, որը նույնպես կլինի սիմետրիկ և բացասական որոշյալ:

H^{-1} հակադարձ մատրիցի գոյությունն ապացուցելու համար բավական է համոզվել, որ $\det H \neq 0$, ինչը հետևում է բարձրագույն հանրահաշվի հետևյալ թեորեմից:

Որպեսզի մատրիցը լինի բացասական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ մատրիցի բոլոր կենտ կարգի անկյունագծային մինորները լինեն բացասական, իսկ զույգ կարգի մինորները՝ դրական, ուստի $\det H \neq 0$, այսինքն՝ H^{-1} գոյություն ունի:

Նախ՝ ապացուցենք, որ $(H^{-1})^T = H^{-1}$:

Ունենք $H \cdot H^{-1} = I$, $(H \cdot H^{-1})^T = I^T$, $(H^{-1})^T \cdot H^T = I$, $(H^{-1})^T \cdot H = I$, այսինքն՝ $(H^{-1})^T$, H մատրիցի հակադարձն է, հետևաբար՝ $(H^{-1})^T = H^{-1}$:

Այժմ ապացուցենք, որ H^{-1} մատրիցը բացասական որոշյալ է, այսինքն՝ ցանկացած Z - ի համար՝ $Z \cdot H^{-1} \cdot Z^T < 0$, եթե $Z \neq 0$:

Նշանակենք $Z \cdot H^{-1} = X$, $Z \cdot H^{-1} \cdot H = X \cdot H$, $Z = X \cdot H$, եթե $Z \neq 0$, ապա $X \neq 0$:

$$Z \cdot H^{-1} \cdot Z^T = (X \cdot H) H^{-1} (X \cdot H)^T = X \cdot H \cdot H^{-1} X^T H^T = X \cdot H^T X^T = X \cdot H \cdot X^T < 0 :$$

Օգտվելով բարձրագույն հանրահաշվից հայտնի բլոկային մատրիցի հակադարձ մատրիցի գոյության և հաշվարկի բանաձևից՝ կունենանք.

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & P \cdot H \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{P} & \frac{\partial f}{\partial x} H^{-1} \\ 0 & \frac{1}{P} & H^{-1} \end{bmatrix} \quad (13.8)$$

և (13.7)-ից.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial q^*}{\partial p} \\ \frac{\partial x^*}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{P} & \frac{\partial f}{\partial x} H^{-1} \\ 0 & \frac{1}{P} & H^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \end{bmatrix}, \quad (13.9)$$

հետևաբար՝

$$\frac{\partial q^*}{\partial P} = -\frac{\partial f}{\partial x} H^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T > 0 : \quad (13.10)$$

Քանի որ H^{-1} -ը բացասական որոշյալ է, ապա.

$$\frac{\partial x^*}{\partial P} = -\frac{1}{P} H^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T, \quad (13.11)$$

կամ

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial P}\right)^T = -\frac{1}{P} \left(H^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T\right)^T = -\frac{1}{P} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (H^{-1})^T = -\frac{1}{P} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot H^{-1} : \quad (13.12)$$

Ածանցելով (13.4)-ի $(n+1)$ նույնություններն ըստ w_j -երի, $j=1, 2, \dots, n$ և ներկայացնելով $n(n+1)$ հավասարումներով հավակարգը մատրիցային տեսքով՝ կունենանք.

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & P \cdot H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial q}{\partial w}\right)^T \\ \frac{\partial x}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (13.13)$$

որտեղ I -ն n -րդ կարգի միավոր մատրից է:

Այսպիսով՝

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial q^*}{\partial w}\right)^T \\ \frac{\partial x^*}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & P \cdot H \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix}, \quad (13.14)$$

իսկ

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial q^*}{\partial w}\right)^T \\ \frac{\partial x^*}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{P} & \frac{\partial f}{\partial x} H^{-1} \\ 0 & \frac{1}{P} & H^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix}. \quad (13.15)$$

(13.15)-ից կունենանք.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial q}{\partial w}\right)^T &= \frac{1}{P} \frac{\partial f}{\partial x} H^{-1}, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right) &= \frac{1}{P} H^{-1}: \end{aligned} \quad (13.16)$$

Այսպիսով՝ (13.12) և (13.16)-ից զգայունություններն ըստ P և $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ գնների կլինեն.

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial q^*}{\partial P}\right) &= -\frac{\partial f}{\partial x} H^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \\ \left(\frac{\partial x^*}{\partial P}\right)^T &= -\frac{1}{P} \frac{\partial f}{\partial x} H^{-1} \\ \left(\frac{\partial q^*}{\partial w}\right)^T &= \frac{1}{P} \frac{\partial f}{\partial x} H^{-1} \\ \left(\frac{\partial x^*}{\partial w}\right) &= \frac{1}{P} H^{-1} \end{aligned} \right. : \quad (13.17)$$

Քանի որ ըստ (13.10)-ի՝ $\frac{\partial q^*}{\partial P} > 0$, ուրեմն՝ (13.4)-ից՝

$$\left\{ \frac{\partial q^*}{\partial P} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial P} > 0, \text{ որտեղ } \frac{\partial f}{\partial x_k} > 0 \quad k=1, 2, \dots, n, \text{ ուստի } \frac{\partial x_k^*}{\partial P} > 0 \right.$$

գոնե մեկ k -ի համար, այսինքն՝ P գնի աճի դեպքում q^* արտադրանքի ծավալի աճին համապատասխանում է արտադրական ծախսերից գոնե մեկի պահանջարկի աճը, որն անվանում են **արժեքավոր արտադրական գործոն**, իսկ եթե $\frac{\partial x_k^*}{\partial P} < 0$, ապա **ցածր-արժեք արտադրական գործոն**:

Բացի այդ, (13.17)-ից հետևում է, որ $\frac{\partial q^*}{\partial w} = -\frac{\partial x^*}{\partial P}$ կամ, որ

$$\text{նույնն է՝ } \frac{\partial q^*}{\partial w_j} = -\frac{\partial x_j^*}{\partial P}, \quad j=1, 2, \dots, n:$$

$$\text{Մյուս կողմից՝ քանի որ } \frac{\partial q^*}{\partial P} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j^*}{\partial P} = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial q^*}{\partial w_j} > 0,$$

հետևաբար՝ $\frac{\partial q^*}{\partial x_j} < 0$ -ից գոնե մեկ j -ի համար, ինչը նշանակում է,

որ այդ j -րդ գործոնի գնի աճը հանգեցնում է արտադրանքի ծավալի նվազմանը: (13.17)-ից հետևում է, որ $\left(\frac{\partial x^*}{\partial w}\right)$ -ն սիմետրիկ է և

$$\text{բացասական որոշյալ, հետևաբար՝ } \frac{\partial x_j^*}{\partial w_j} < 0, \quad j=1, 2, \dots, n, \text{ ինչը}$$

նշանակում է, որ ցանկացած j -րդ գործոնի գնի աճը հանգեցնում է այդ գործոնի նկատմամբ պահանջարկի նվազմանը: Այն փաստից,

$$\text{որ } \left(\frac{\partial x^*}{\partial w}\right) \text{ մատրիցը սիմետրիկ է, հետևում է, որ } \frac{\partial x_j^*}{\partial w_l} = -\frac{\partial x_l^*}{\partial w_j},$$

$$j, l=1, 2, \dots, n:$$

Եթե $\frac{\partial x_j^*}{\partial w_l} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \begin{cases} j\text{-րդ և } l\text{-րդ արտադրական գործոնները փոխադարձ} \\ \text{փոխարինելի են,} \\ j\text{-րդ և } l\text{-րդ արտադրական գործոնները փոխադարձ} \\ \text{լրացնող են:} \end{cases}$

13.2. ՈՉ ԿԱՏԱՐՅԱԼ ՄՐՑԱԿՑՈՒԹՅՈՒՆ, ՄԵՆԱՇՆՈՐԻ (ՄՈՆՈԴՈԼԻԱ) ԵՎ ՄՈՆՈԴՍՈՆԻԱ

Ի տարբերություն **կատարյալ մրցակցության**, որը բնութագրվում է արտադրողների կողմից գները կառավարելու անհնարինությամբ, **մենաշնորհի** առկայության դեպքում ֆիրման ի վիճակի է, ի հաշիվ արտադրանքի ծավալը (առաջարկը) կառավարելու հնարավորության, ազդելու իր իսկ կողմից արտադրված ապրանքի գնի վրա, անշուշտ, հոգուտ ֆիրմայի առավելագույն շահույթի: Նույնկերպ, ենթադրվում է, որ **մոնոպսոնիան** հնարավորություն ունի ազդելու արտադրական ծախքերի գների վրա:

Ենթադրենք՝ ֆիրմայի արտադրանքի ծավալը ներկայացվում է $q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ տեսքով, որտեղ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ը արտադրական ֆունկցիան է, իսկ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ը՝ արտադրական ծախքերը (գործոնները): Մենաշնորհի և մոնոպսոնիայի պայմաններում հիմնավոր է q արտադրանքի և արտադրության x_j գործոններին համապատասխան P և w_j գները դիտարկել որպես q -ից և x_j -երից կախված ֆունկցիաներ՝ $P = P(q)$, $w_j = w_j(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, այնպես, որ $\frac{\partial P(q)}{\partial q} < 0$, $\frac{\partial w_j(x_j)}{\partial x_j} > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$:

Եթե դիտարկված $P(q)$ և $w_j(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ գների դեպքում

ֆիրմայի շահույթը նշանակենք Π -ով, ապա $\Pi = P(q) \cdot q - \sum_{j=1}^n w_j(x_j) \cdot x_j$,

և բնական է ձևակերպել ստորև բերվող խնդիրը:

Որոշել q -ն և x_j -երը՝ որպես հետևյալ օպտիմալացման խնդրի լուծում.

$$\max \Pi = P(q) \cdot q - \sum_{j=1}^n w_j(x_j) \cdot x_j, \quad (13.18)$$

$$q = f(x_1, x_2, \dots, x_n): \quad (13.19)$$

Փորձենք (13.18)-(13.19) խնդիր լուծել **Լագրանժի բազմապատկիչների եղանակով**, որտեղ.

$$L(q, x_1, x_2, \dots, x_n, y) = P(q) \cdot q - \sum_{j=1}^n w_j(x_j) \cdot x_j + y[f(x_1, x_2, \dots, x_n) - q],$$

իսկ q^* , $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ լավագույն լուծումները գտնել որպես հետևյալ համակարգին բավարարող լուծումներ.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q} = P(q) + \frac{\partial P}{\partial q} q - y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_j} = -w_j(x_j) - \frac{\partial w_j}{\partial x_j} x_j + y \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 & j=1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial y} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - q = 0 \end{cases} :$$

Այսպիսով՝ օպտիմալության համար անհրաժեշտ պայմանները կներկայացվեն ստորև բերված համակարգի տեսքով.

$$\begin{cases} y = P(q) + \frac{\partial P}{\partial q} q \\ y \frac{\partial f}{\partial x_j} = w_j(x_j) + \frac{\partial w_j}{\partial x_j} x_j & j=1, 2, \dots, n \\ q = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

13.3. ՕԼԻԳՈՊՈԼԻԱ ԵՎ ՕԼԻԳՈՊՍՈՆԻԱ. ՄՐՑԱԿՑՈՒԹՅՈՒՆ ՓՈՔՐԱԹԻՎ ՄԱՍՆԱԿԻՑՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Փոքրաթիվ մասնակիցների միջև մրցակցությունը նշանակում է շուկայական տնտեսության այնպիսի մեխանիզմ, երբ գործող ֆիրմաները փոքրաթիվ են և իրենց գործելակերպով կարողանում են ազդել գների ձևավորման գործընթացի վրա:

Այն իրավիճակը, երբ արտադրանք վաճառողներն ընդամենը մի քանիսն են, ընդունված է անվանել **օլիգոպոլիա**:

Այն իրավիճակը, երբ արտադրության գործոնների գնորդներն են ընդամենը մի քանիսը, անվանում են **օլիգոպսոնիա**:

Չնայած օլիգոպոլիայի և/կամ օլիգոպսոնիայի պայմաններում յուրաքանչյուր մասնակից կարող է ազդել արտադրանքի և արտադրական գործոնների գների վրա, սակայն յուրաքանչյուր ֆիրմայի տնտեսական օպտիմալ գործունեությունը պայմանավորված է ոչ միայն արտադրանքի և գործոնների ծախքերի շուկայի վրա իր ուղղակի ազդեցության չափով, այլև մրցակիցների վարքագծից բխող անուղղակի ազդեցություններով:

Դիտարկենք այն մասնակի դեպքը, երբ օլիգոպոլիայի մրցակից ֆիրմաները **երկուսն** են: Ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր ֆիրմայի արտադրանքի ծավալը համապատասխանաբար՝ $q^1 = f^1(x_1^1, \dots, x_j^1, \dots, x_n^1)$ և $q^2 = f^2(x_1^2, \dots, x_j^2, \dots, x_n^2)$ է, որտեղ $f^1(x_1^1, \dots, x_j^1, \dots, x_n^1)$ -ը և $f^2(x_1^2, \dots, x_j^2, \dots, x_n^2)$ -ը առաջին և երկրորդ ֆիրմաների արտադրական ֆունկցիաներն են, իսկ x_j^1 -ը և x_j^2 -ը՝ արտադրական ծախսերը:

Բնական է ենթադրել, որ արտադրանքի գինը կլինի՝ $P = P(q^1, q^2)$, j -րդ գործոնի գինը՝ $w_j = w_j(x_j^1, x_j^2)$, իսկ $\frac{\partial P(q^1, q^2)}{\partial q^1} < 0$, $\frac{\partial P(q^1, q^2)}{\partial q^2} < 0$, $\frac{\partial w_j(x_j^1, x_j^2)}{\partial x_j^1} > 0$, $\frac{\partial w_j(x_j^1, x_j^2)}{\partial x_j^2} > 0$:

Ձևակերպենք առաջին ֆիրմայի առջև ծառացած խնդիրը.

$$\max \Pi^1 = P(q^1, q^2) \cdot q^1 - \sum_{j=1}^n w_j(x_j^1, x_j^2) \cdot x_j^1, \quad (13.20)$$

$$q^1 = f^1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1): \quad (13.21)$$

Դիտարկենք (13.20)-(13.21) խնդիրն համապատասխանող՝ Լագրանժի ֆունկցիան.

$$L(q^1, q^2, x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, y) = P(q^1, q^2) \cdot q^1 - \sum_{j=1}^n w_j(x_j^1, x_j^2) \cdot x_j^1 + y[f^1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1) - q^1]$$

հետևաբար՝ $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ $q^1, x^1 = (x_1^1, \dots, x_j^1, \dots, x_n^1)$ լավագույն լուծումները կստացվեն ըստ հետևյալ համակարգի.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^1} &= P(q^1, q^2) + q^1 \frac{\partial P}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial P}{\partial q^2} \frac{\partial q^2}{\partial q^1} - y = 0 \end{aligned} \right. \quad (13.22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j^1} &= -w_j(x_j^1, x_j^2) - x_j^1 \frac{\partial w_j}{\partial x_j^1} - x_j^1 \frac{\partial w_j}{\partial x_j^2} \frac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1} + y \frac{\partial f^1}{\partial x_j^1} = 0, \quad j=1, 2, \dots, n: \end{aligned} \right. \quad (13.23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= f^1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1) - q^1 = 0 \end{aligned} \right.$$

Գտնելով y -ը (13.22) հավասարումից և տեղադրելով (13.23)-ի

մեջ՝ կստանանք (13.20)-(13.21) խնդրի լավագույն լուծման անհրաժեշտ և բավարար հետևյալ պայմանները.

$$\left[P + q^1 \left(\frac{\partial P}{\partial q^1} + \frac{\partial P}{\partial q^2} \frac{\partial q^2}{\partial q^1} \right) \right] \frac{\partial f^1}{\partial x_j^1} = w_j + x_j^1 \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_j^1} + \frac{\partial w_j}{\partial x_j^2} \frac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1} \right), \quad j=1, 2, \dots, n,$$

$$q^1 = f^1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1):$$

Հաշվի առնելով, որ երկու մրցակիցներն էլ շահագրգռված են $P(q^1, q^2)$ և $w_j(x_j^1, x_j^2)$ գներով, ապա $\frac{\partial q^2}{\partial q^1}$ և $\frac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1}$ արտահայտու-

թյուններից առաջինը կարելի է մեկնաբանել որպես երկրորդ ֆիրմայի q^2 արտադրանքի փոփոխության վարքի չափորոշիչ՝ ի պատասխան առաջին ֆիրմայի q^1 արտադրանքի փոփոխության, իսկ $\frac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1}$ արտահայտությունը՝ որպես երկրորդ ֆիրմայի կողմից q^2

արտադրանքի համար j -րդ գործոնի ∂x_j^2 ծախքի փոփոխության վարքի չափորոշիչ՝ ի պատասխան առաջին ֆիրմայի ∂x_j^1 ծախքի փոփոխության: Նմանատիպ մեկնաբանություններ կարելի է տալ $\frac{\partial q^1}{\partial q^2}$ և $\frac{\partial x_j^1}{\partial x_j^2}$ արտահայտություններին:

Նկատենք, որ $\frac{\partial q^2}{\partial q^1}$ և $\frac{\partial x_j^2}{\partial x_j^1}$, $j=1, 2, \dots, n$ չափորոշիչները պետք է

կանխորոշվեն որպես առաջին (երկրորդ) ֆիրմայի կողմից իր իրականացրած գործունեությանը մրցակից ֆիրմայի պատասխան հակազդեցության բնութագրիչներ:

13.4. ԿՈՒՈՆՈՅԻ ԵՐԿՇՆՈՐՅԱՅԻՆ (ԴՈՒՈՊՈԼ) ՍՈՂԵԼԸ

Դիտարկենք ֆիրմայի տեսության մեջ հայտնի՝ **Կուռնոյի երկ-շնորհային** (դուոպոլ) **մոդելը**, երբ $P(q^1, q^2) = a - b(q^1 + q^2)$, $a > 0$, $b > 0$, իսկ առաջին և երկրորդ ֆիրմաների համար արտադրական ծախսերը համապատասխանաբար կազմում են.

$$c^1 = c \cdot q^1 + d, \text{ և } c^2 = c \cdot q^2 + d, \quad c > 0, \quad d > 0:$$

Այս ենթադրությունների դեպքում առաջին և երկրորդ ֆիրմաների շահույթները համապատասխանաբար կլինեն.

$$\Pi^1 = [a - b(q^1 + q^2)] \cdot q^1 - c \cdot q^1 - d,$$

$$\Pi^2 = [a - b(q^1 + q^2)] \cdot q^2 - c \cdot q^2 - d:$$

$\max_{q^1} \Pi^1$ և $\max_{q^2} \Pi^2$ արժեքները որոշելու համար անհրաժեշտ է,

որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները.

$$\frac{\partial \Pi^1}{\partial q^1} = 0 \quad \text{և} \quad \frac{\partial \Pi^2}{\partial q^2} = 0,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi^1}{\partial q^1} = a - b(q^1 + q^2) - b \cdot q^1 - b \frac{\partial q^2}{\partial q^1} q^1 - c = 0 \\ \frac{\partial \Pi^2}{\partial q^2} = a - b(q^1 + q^2) - b \cdot q^2 - b \frac{\partial q^1}{\partial q^2} q^2 - c = 0 \end{cases} : \quad (13.24)$$

Կուռնոյի երկշնորհային մոդելի վերլուծությունը հիմնված է այն ենթադրության վրա, որ երկու մրցակից **փոխադարձաբար անտարբեր են** միմյանց գործունեության նկատմամբ, այսինքն՝

$$\frac{\partial q^2}{\partial q^1} = 0 \quad \text{և} \quad \frac{\partial q^1}{\partial q^2} = 0, \text{ ինչի հետևանքով (13.20) համակարգը կստանա}$$

հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} a - 2bq^1 - bq^2 - c = 0 \\ a - 2bq^2 - bq^1 - c = 0 \end{cases}, \quad (13.25)$$

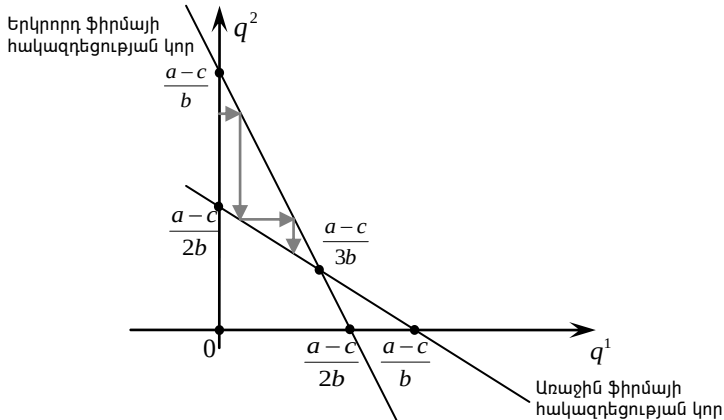
իսկ լուծումը՝ $q^1 = q^2 = \frac{a-c}{3b}$, որի դեպքում կստանանք.

$$P(q^1, q^2) = \frac{a+2c}{3}, \quad \Pi_{\max}^1 = \Pi_{\max}^2 = \frac{(a-c)^2}{9b} - d:$$

Լուծելով (13.25) համակարգի առաջին հավասարումը q^1 -ի, երկրորդը՝ q^2 -ի նկատմամբ և դիտարկելով մեկ միավորի հավասար **ժամանակային լագը**՝ կունենանք.

$$q^1(t+1) = \frac{a-c-b \cdot q^2(t)}{2b}, \quad q^2(t+1) = \frac{a-c-b \cdot q^1(t)}{2b}$$

հակազդեցության կորերը, որոնց գրաֆիկների միջոցով ակնառու կերպով կներկայացվի Կուռնոյի՝ $q^1 = q^2 = \frac{a-c}{3b}$ լուծումը գրաֆիկական մեկնաբանությամբ:



ՊՃԱՎԱՏԿԵՐ 13.1

13.5. ՇՏԱԿԵԼԲԵՐԳԻ ՄՈԴԵԼԸ

Դիտարկենք այն դեպքերը, երբ մասնակիցներից մեկը կամ երկուսը միաժամանակ ենթադրում են, որ մրցակիցն օգտվում է Կուռնոյի հակազդեցության կորից:

Նախ՝ վերլուծենք այն դեպքը, երբ **միայն առաջին** մասնակիցն է ենթադրում, որ երկրորդի վարքը բնութագրվում է ըստ Կուռնոյի՝ $q^1(t+1) = \frac{a-c-b \cdot q^2(t)}{2b}$ հակազդեցությամբ:

Այսպիսով՝ $\frac{\partial q^1}{\partial q^2} = 0$, $\frac{\partial q^2}{\partial q^1} = -\frac{1}{2}$, և տեղադրելով այդ արժեքները

(13.24)-ի մեջ՝ կունենանք.

$$\begin{cases} a - bq^1 - bq^2 - bq^1 + \frac{1}{2}bq^1 - c = 0 \\ a - bq^1 - bq^2 - bq^2 - c = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 2a - 3bq^1 - 2bq^2 - 2c = 0 \\ a - bq^1 - 2bq^2 - c = 0 \end{cases} :$$

Հանելով առաջին հավասարումից երկրորդը, կստանանք՝
 $a - 2bq^1 - c = 0$, $q^1 = \frac{a-c}{2b}$, իսկ $q^2 = \frac{a-c}{4b}$:

Գինը կկազմի.

$$P(q^1, q^2) = a - b(q^1 + q^2) = a - b\left(\frac{a-c}{2b} + \frac{a-c}{4b}\right) = \frac{4+3c}{4},$$

$$\Pi_{\max}^1 = \frac{a+3c}{4}q^1 - cq^1 - d = \left(\frac{a+3c}{4} - c\right)q^1 - d = \frac{(a-c)^2}{8b} - d,$$

$$\Pi_{\max}^2 = \frac{a+3c}{4}q^2 - cq^2 - d = \left(\frac{a+3c}{4} - c\right)q^2 - d = \frac{(a-c)^2}{16b} - d :$$

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ **երկու մասնակիցն** էլ ենթադրում են, որ մրցակիցներից յուրաքանչյուրի վարքը բնութագրվում է ըստ Կուռնոյի՝ $q^1(t+1) = \frac{a-c-b \cdot q^2(t)}{2b}$, $q^2(t+1) = \frac{a-c-b \cdot q^1(t)}{2b}$

հակադեցուքությունների, այսինքն՝ $\frac{\partial q^1}{\partial q^2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial q^2}{\partial q^1} = -\frac{1}{2}$:

Տեղադրելով այս արժեքները (13.24)-ի մեջ՝ կունենանք.

$$\begin{cases} 2a - 3bq^1 - 2bq^2 - 2c = 0 \\ 2a - 3bq^2 - 2bq^1 - 2c = 0 \end{cases} :$$

Այս համակարգի առաջին հավասարումից հանելով երկրորդը՝ կստանանք.

$$-bq^1 + bq^2 = 0, \quad q^1 = q^2 = \frac{2a-2c}{5b} :$$

Գինը կլինի.

$$P(q^1, q^2) = a - b(q^1 + q^2) = a - \frac{4a-4c}{5} = \frac{a+4c}{5},$$

$$\Pi_{\max}^1 = \frac{a+4c}{5}q^1 - cq^1 - d = \left(\frac{a+4c}{5} - c\right) \cdot \frac{2a-2c}{5b} - d = \frac{2(a-c)^2}{25b} - d,$$

$$\Pi_{\max}^2 = \Pi_{\max}^1 = \frac{2(a-c)^2}{25b} - d :$$

Նշված մեծությունները հաշվարկված են $a = 75$, $c = 15$,
 $b = 2$, $d = 20$, $\frac{(a-c)^2}{b} = 1800$ թվային արժեքների դեպքում և
 ներկայացված են ստորև բերված 13.1 աղյուսակում.

Աղյուսակ 13.1

II ֆիրմա

		$\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = 0$	$\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}$
I ֆիրմա	$\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0$	$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3b} = 10$ $P = \frac{a+2c}{3} = 35$ $\Pi_{\max}^1 = \Pi_{\max}^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{a-c}{b} - d = 180$	$q_1 = \frac{a-c}{2b} = 15, \quad q_2 = \frac{a-c}{4b} = 7,5$ $P = \frac{a+3c}{4} = 30, \quad \Pi_{\max}^2 = 92,5$ $\Pi_{\max}^1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{(a-c)^2}{b} - d = 205$
		-----	-----
	$\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = -\frac{1}{2}$	$q_1 = \frac{a-c}{4b} = 7,5, \quad q_2 = \frac{a-c}{2b} = 15$ $P = \frac{a+3c}{4} = 30, \quad \Pi_{\max}^2 = 205$ $\Pi_{\max}^1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{(a-c)^2}{b} - d = 92,5$	$q_1 = q_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{a-c}{b} = 12$ $P = \frac{a+4c}{5} = 27$ $\Pi_{\max}^1 = \Pi_{\max}^2 = \frac{2}{25} \cdot \frac{(a-c)^2}{b} = 124$

Որոշենք հակազդեցությունների $\frac{\partial q^1}{\partial q^2} = \frac{\partial q^2}{\partial q^1}$ չափորոշիչների

այն լավագույն $x = \frac{\partial q^1}{\partial q^2} = \frac{\partial q^2}{\partial q^1}$ արժեքը, որի դեպքում $\Pi_{\max}^1$ -ը և

$\Pi_{\max}^2$ -ը կրնդունեն առավելագույն արժեքներ: $\frac{\partial q^1}{\partial q^2} = \frac{\partial q^2}{\partial q^1} = x$ ար-

ժեքը տեղադրենք (13.24) համակարգում.

$$\begin{cases} [a - b(q^1 + q^2)] - b \cdot q^1 - b \cdot x \cdot q^1 - c = 0 \\ [a - b(q^1 + q^2)] - b \cdot q^2 - b \cdot x \cdot q^2 - c = 0 \end{cases}.$$

Առաջին հավասարումից հանենք երկրորդը.

$$-b \cdot q^1 + -b \cdot q^2 - b \cdot x \cdot q^1 + b \cdot x \cdot q^2 = 0,$$

$$(q^2 - q^1) + x(q^2 - q^1) = 0,$$

$$(q^2 - q^1) \cdot (1+x) = 0:$$

Կատանանք՝ $q^1 = q^2$ կամ $x = -1$: Դիտարկենք $q^1(x) = q^2(x)$, $x \neq -1$ դեպքը: Տեղադրելով $q^2 = q^1$ առաջին հավասարման մեջ՝ կունենանք.

$$a - 2bq^1 - bq^1 - bxq^1 - c = 0, \quad a - c = 3bq^1 + bxq^1,$$

$$q^1(x) = \frac{a-c}{(3+x)b} = q^2(x),$$

գինը՝

$$p = a - b(q_1 + q_2) = a - b \left(\frac{2a-2c}{(3+x)b} \right) = a - \frac{2a-2c}{x+3} = \frac{ax+3a-2a+2c}{x+3} = \frac{(a+ax)+2c}{x+3},$$

$$p(x) = \frac{(x+1)a+2c}{x+3},$$

$$\begin{aligned} \Pi^1(x) &= p \cdot q^1 - c \cdot q^1 - d = (p-c) \cdot q^1 - d = \left(\frac{(x+1)a+2c}{x+3} - c \right) \cdot \frac{a-c}{(x+3)b} - d = \\ &= \frac{(x+1)a+2c-cx-3c}{x+3} \cdot \frac{a-c}{(x+3)b} - d = \frac{((x+1)a-cx-c) \cdot (a-c)}{(x+3)^2 b} - d = \\ &= \frac{(x+1)a-(x+1)c}{(x+3)^2 b} \cdot (a-c) - d = \frac{(x+1)(a-c)^2}{(x+3)^2 b} - d = \frac{(x+1)}{(x+3)^2} \cdot \frac{(a-c)^2}{b} - d: \end{aligned}$$

Որոշենք x -ի այն արժեքը, որի դեպքում $\Pi^1(x)$ շահույթը կլինի առավելագույնը, և քանի որ $\frac{(a-c)^2}{b} > 0$, $d < 0$, $x+1 \leq 0$ դեպքում $\Pi^1(x) < 0$, փնտրենք շահույթի $\Pi^1(x)$ ֆունկցիայի մաքսիմումը $x \in (-1, +\infty)$ միջակայքում:

Քանի որ $\frac{(a-c)^2}{b} > 0$, ապա շահույթի $\Pi^1(x)$ ֆունկցիայի $x_{\max}$

կետի որոշումը հանգում է $f(x) = \frac{x+1}{(x+3)^2}$ ֆունկցիայի մաքսիմում

կետի որոշմանը.

$$f'(x) = \left[\frac{x+1}{(x+3)^2} \right]' = \frac{(x+3)^2 - 2(x+3)(x+1)}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)(x+3-2x-2)}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)(1-x)}{(x+3)^2} > 0$$

Հետևաբար՝ գոյություն ունի A վերջավոր թիվն այնպես, որ.

$$\max_{\bar{X} \in G_1(X)} f(\bar{X}) = A:$$

Եթե (13.26) համակարգից առանձնացնենք կամայական $g_{i_0}(\bar{X}) \leq b_{i_0}$ կոշտ սահմանափակումով պայմանավորված $G_1(X) = \{\bar{X} \mid g_i(\bar{X}) \leq b_i, i = \overline{1, m}, i \neq i_0\}$ բազմությունը, ապա (13.26)-(13.27) խնդիրը կարելի է ներկայացնել հետևյալ հարմար տեսքով.

$$f(\bar{X}) \rightarrow \max, \quad (13.28)$$

$$\begin{cases} \bar{X} \in G(\bar{X}) : \end{cases} \quad (13.29)$$

$$\begin{cases} g_{i_0}(\bar{X}) \leq b_{i_0} \end{cases} \quad (13.30)$$

Օգտագործելով (13.28)–(13.30) խնդրի նպատակային $f(\bar{X})$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքին համապատասխանող A թիվը և առանձնացված i_0 -րդ կոշտ սահմանափակումը՝ ձևակերպենք **երկրորդ խնդիրը** հետևյալ կերպ.

$$g_{i_0}(\bar{X}) \rightarrow \min, \quad (13.31)$$

$$\begin{cases} \bar{X} \in G(\bar{X}) : \end{cases} \quad (13.32)$$

$$\begin{cases} f(\bar{X}) \geq A \end{cases} \quad (13.33)$$

Ձևակերպված առաջին և երկրորդ խնդիրների զույգը կոչվում է **փոխադարձ**:

Քանի որ առաջին խնդրի ցանկացած $\bar{X}^*$ լավագույն լուծման համար $f(\bar{X}^*) = A$, ապա այն կբավարարի նաև երկրորդ խնդրի (13.32) և (13.33) սահմանափակումները: Այսինքն՝ երկրորդ խնդրի թույլատրելի լուծումների $G_2(\bar{X})$ բազմությունը ևս դատարկ չէ, և եթե ենթադրենք, որ այդ բազմության վրա $g_{i_0}(\bar{X}) \geq 0$, ապա գոյություն կունենա B վերջավոր թիվն այնպես, որ.

$$\min \{g_{i_0}(\bar{X})\} = B,$$

$$\bar{X} \in G_2(\bar{X}) :$$

Առաջին և երկրորդ խնդիրների լավագույն լուծումների բազմությունները համապատասխանաբար նշանակենք.

$$G^*(\bar{X}) = \{\bar{X} \mid \bar{X} \in G_1(X), f(\bar{X}) = A, g_{i_0}(\bar{X}) = b_{i_0}\},$$

$$\hat{G}(\bar{X}) = \{\bar{X} \mid \bar{X} \in G_2(X), g_{i_0}(\bar{X}) = B\}:$$

Փոխադարձության թեորեմ: Առաջին և երկրորդ փոխադարձ խնդիրների լավագույն լուծումների $G^*(\bar{X})$ և $\hat{G}(\bar{X})$ բազմությունները համընկնում են:

Ապացույց:

Նախ՝ ապացուցենք, որ $\hat{G}(\bar{X}) \subseteq G^*(\bar{X})$:

Ենթադրենք՝ $\hat{X} \in \hat{G}(\bar{X})$, $X^* \in G^*(\bar{X})$: Նկատենք, որ ցանկացած լավագույն լուծման համար $g_{i_0}(X^*) = b_{i_0}$, և, ինչպես նշեցինք, քանի որ $X^* \in G_2(\bar{X})$, իսկ $g_{i_0}(\hat{X})$ -ը երկրորդ խնդրի (13.31) նպատակային ֆունկցիայի նվազագույն արժեքն է, ապա $g_{i_0}(\hat{X}) \leq g_{i_0}(X^*) = b_{i_0}$, այսինքն՝ X^* -ը բավարարում է առաջին խնդրի (13.33) սահմանափակումը, ուրեմն՝ $\hat{X} \in G_1(\bar{X})$, և քանի որ A -ն առաջին խնդրի $f(X)$ նպատակային ֆունկցիայի մեծագույն արժեքն է, ուրեմն՝ $f(\hat{X}) \leq A$: Մյուս կողմից՝ քանի որ $\hat{X} \in G_2(\bar{X})$, ապա $f(\hat{X}) \geq A$: Չետևաբար՝ $f(\hat{X}) = A$, այսինքն՝ $\hat{X}$ -ը առաջին խնդրի լավագույն լուծումն է, և $\hat{X} \in G^*(\bar{X})$:

Այժմ ապացուցենք, որ $G^*(\bar{X}) \subseteq \hat{G}(\bar{X})$:

Դարձյալ դիտարկենք $\hat{X} \in \hat{G}(\bar{X})$ և $X^* \in G^*(\bar{X})$ լավագույն լուծումները:

Արդեն ունենք, որ և՛ $\hat{X}$ -ը, և՛ X^* -ը պատկանում են $G^*(\bar{X})$ բազմությանը, ուստի $g_{i_0}(\hat{X}) = b_{i_0}$ և $g_{i_0}(X^*) = b_{i_0}$, այսինքն՝ $g_{i_0}(X^*) = g_{i_0}(\hat{X}) = B$: Չետևաբար՝ առաջին խնդրի X^* լավագույն լուծումը $g_{i_0}(\bar{X})$ ֆունկցիային հաղորդում է նվազագույն B արժեք, ուստի $X^* \in \hat{G}(\bar{X})$:

Դիտողություն¹⁵: Որպես առաջին խնդրի i_0 -րդ սահմանափակում նպատակահարմար է վերցնել այնպիսի $g_{i_0}(\bar{X}) \leq b_{i_0}$ կոշտ սահմանափակում, որը «դեֆիցիտային» է, այսինքն՝ b_{i_0} -ի դրական աճի դեպքում դրական աճ կարձանագրի նաև առաջին խնդրի նպատակային ֆունկցիայի A մեծագույն արժեքը:

¹⁵ Փոխադարձ խնդիրների տնտեսագիտական մեկնաբանությունը և օպտիմալ գնահատականների վերլուծությունը ներկայացված են հետևյալ գրքում՝ Тавадян А. А., Интервалы неопределенности экономики, Москва, "Наука", 2012, էջ 40-48:

ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԵՎ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՆԵՐԻ ԻՄԻՏԱՑԻՈՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՈՒՄ

Սահմանում: Իմիտացիոն¹⁶ մոդելավորումը, որպես մեթոդ, ներկայացնում է մաթեմատիկական մոդելավորման մասնակի դեպք, որը կառուցվող մոդելներով նկարագրում է գործընթացներն այնպես, ինչպես դրանք տեղի են ունենում կամ տեղի են ունենալու իրականում:

Գոյություն ունեն օբյեկտներ, որոնց համար տարբեր պատճառներով մշակված չեն անալիտիկ (վերլուծական) մոդելներ կամ ստացված մոդելների լուծման մեթոդները: Այդ դեպքում անալիտիկը փոխարինվում է իմիտացիոն մոդելով, որը մեծ ճշտությամբ նկարագրում է իրական համակարգը, և որի հետ անցկացվում են փորձարկումներ՝ նպատակ ունենալով ստանալու այդ համակարգի մասին տեղեկատվություն, դրա համար կիրառելով օբյեկտի մաթեմատիկական նկարագրությունը: Նման մոդելը որոշակի ժամանակահատվածում կարելի է «խաղարկել»՝ ինչպես մեկ, այնպես էլ բազմաթիվ անգամներ փորձարկելով: Մոդելի փորձարկումը կոչվում է **իմիտացիա/սիմուլյացիա** (ըմբռնել երևույթի էությունը՝ առանց իրական օբյեկտի նկատմամբ փորձերի դիմելու): Այդ դեպքում փորձարկման արդյունքները որոշվում են գործընթացների պատահական բնույթով: Ըստ այդ տվյալների՝ կարելի է ստանալ բավական կայուն վիճակագրություն:

14.1. ԻՄԻՏԱՑԻՈՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԻՄՔԵՐԸ

Մոնտե Կառլոյի մեթոդ: Այս մեթոդով վիճակագրական փորձարկումը պարզ իմիտացիոն մոդելավորում է, երբ լիակատար բացակայում են վարքագծի բոլոր կանոնները: Ըստ Մոնտե Կառլոյի մեթոդի՝ ստոխաստիկ կամ հավանականային տարրեր պարունակող համակարգերի համակարգչային մոդելավորման հիմնական սկզբունքը տարբեր ընտրանքների ստացումն է: Մեթոդի ծագումը

¹⁶ Իմիտացիա՝ Imitatio (լատ.՝ նմանակում):

կապվում է Նեյմանի և Ուլանի աշխատանքների հետ, որոնք կատարվել են 1940-ական թվականներին, թեպետ դա հայտնի էր նախկինում ևս: Լոս Ալամոսում միջուկային տեխնիկային առնչվող գաղտնի աշխատանքների կատարման ընթացքում մեթոդի կիրառումն այնքան հաջող ընթացք ունեցավ, որ տարածվեց նաև այլ ոլորտներում, մասնավորապես՝ տնտեսագիտության մեջ: Սոնտե Կառլոյի մեթոդը սկսեց լայնորեն օգտագործվել հզոր համակարգիչների հնարավորությունների համադրմամբ:

14.1.1. Համակարգերի ընդհանուր տեսություն

Մեծ, բայց ոչ անվերջ թվով ֆիզիկական, կենսաբանական և սոցիալական օբյեկտների փոխգործակցության ընդհանուր օրինաչափությունների գոյության գաղափարն առաջին անգամ առաջարկվել է 1937 թ. Բերտալանֆիի կողմից՝ Չիկագոյի համալսարանում փիլիսոփայության սեմինարի ժամանակ: Համակարգերի ընդհանուր տեսության հիմնական սկզբունքը համակարգային օբյեկտների գործունեության կառավարման օրենքների **իզոմորֆիզմի** (նմանատիպության) ճանաչումն է: Ֆոն Բերտալանֆին նաև սահմանեց և ուսումնասիրեց **«բաց համակարգը»**, որն անընդհատ նյութեր և էներգիա է փոխանակում արտաքին միջավայրի հետ:

14.1.2. Ջանգվածային սպասարկման տեսություն

Յուրաքանչյուր համակարգ, որտեղ պատվերների հոսքերի բավարարումը ռեսուրսներով հանդիպում է որոշ սահմանափակումների, կարող է դիտարկվել որպես **զանգվածային սպասարկման համակարգ**: Մասնավորապես՝ եթե պատվերների ստացման պահերը և սպասարկման տևողությունը կարգավորված չեն, ապա համակարգում ի հայտ են գալիս հակամարտություններ, և առաջանում են հերթեր: Հերթի երկարությունը կախված է պատվերների հոսքի երկու հիմնական բնութագրերից. առաջին՝ հոսքի ինտենսիվություն, երկրորդ՝ այդ ինտենսիվության վիճակագրական փոփոխություններ: Ջանգվածային սպասարկման տեսության հիմքը դրել է Կոպենհագենի հեռախոսային ընկերության աշխատող, գիտնական Ագներ Էրլանգը (Agner Krarup Erlang)՝ 1908–1922 թթ. միջև ընկած ժամանակահատվածում:

14.1.3. Մարկովյան գործընթաց

Այն պատահական գործընթացը, որի զարգացումը ցանկացած ժամանակային t պարամետրից հետո կախված չէ նախորդ զարգա-

ցումներից, կոչվում է **մարկոլյան** («ապագա» գործընթացը անկախ է «անցյալից», երբ հայտնի է «ներկան», ըստ մեկ այլ մեկնաբանության՝ «ապագա» գործընթացը կախված է «անցյալից» միայն «ներկայի» միջոցով): Առաջին անգամ այն ձևակերպեց Ա.Մարկովը, ով 1907 թ. իր աշխատանքներում հիմք դրեց կախյալ փորձարկումների հաջորդականությունների և դրանց հետ կապված՝ պատահական մեծությունների գումարների ուսումնասիրությանը: Հետագոտությունների այս բնագավառը հայտնի է որպես մարկոլյան շղթաների տեսություն:

Ո՞րն է իմիտացիոն մոդելավորման կիրառման անհրաժեշտությունը.

- իրական օբյեկտի փորձարկումները թանկ են կամ անհնար,
- անալիտիկ մոդելի կառուցումն անհնար է, քանի որ համակարգի վիճակը փոխվում է ժամանակի ընթացքում, առկա են պատճառահետևանքային կապեր, ոչ զծայնություններ, ստոխաստիկ (պատահական) փոփոխականներ,
- անհրաժեշտ է **նմանակել** համակարգի վարքագիծը ժամանակի ընթացքում:

Իմիտացիոն մոդելավորման նպատակն է վերարտադրել ուսումնասիրվող համակարգի վարքագիծը՝ հիմնվելով տարրերի կարևորագույն հարաբերությունների վերլուծության վրա, կամ, այլ կերպ ասած, ուսումնասիրվող առարկայական տիրույթի համար մշակել սիմուլյատոր (simulation modeling)՝ տարբեր փորձեր իրականացնելու նպատակով:

Իմիտացիոն մոդելավորումը թույլ է տալիս նմանակել համակարգի վարքագիծը ժամանակի ընթացքում: Առավելություն է համարվում այն, որ ժամանակը մոդելում կարելի է կառավարել. դանդաղացնել, եթե գործընթացն ընթանում է արագացված կերպով և արագացնել այնպիսի մոդելավորվող համակարգի համար, որտեղ այն դանդաղ է փոփոխվում: Կարելի է իմիտացիայի ենթարկել այն օբյեկտների վարքագիծը, որոնցում փորձերի իրականացումը թանկ է, անհնարին կամ վտանգավոր: Անհատական համակարգիչների դարում բարդ և եզակի արտադրանքի արտադրությունը, որոշումների կայացումը, ինչը կապված է մեծ թվով մարդկանց կամ պետությունների կյանքի ու ճակատագրի հետ, սովորաբար ուղեկցվում են համակարգչային եռաչափ (3D) իմիտացիոն մոդելավորմամբ: Այդ ճշգրիտ և համեմատաբար արագ տեխնոլոգիան թույլ է տալիս կուտակել բոլոր անհրաժեշտ գիտելիքները սարքավորումների, ընթացող գործընթացների մասին մինչ դրանց արտադրությունը կամ որոշումների ընդունումը:

14.2. ՊԱՏՄԱԿԱՆ ԱԿՆԱՐԿ

Իմիտացիան, որպես ոչ պարզ (ոչ տրիվիալ) խնդիրներ լուծելու մեթոդ, առաջընթաց ապրեց 1950–1960 թթ.՝ համակարգիչների ստեղծման հետ միասին:

1970–1980-ականներին ձևավորված մոդելավորման բազմաթիվ համակարգեր էվոլյուցիայի ենթարկվեցին համակարգչային սարքավորումների և օպերացիոն համակարգերի զարգացմանը զուգընթաց և ներկայումս արդյունավետ կերպով օգտագործվում են նոր համակարգիչներով: 1990-ականների վերջին և XXI դարի սկզբին ստեղծվեցին մոդելավորման սկզբունքներն նոր համակարգեր, որոնց հայեցակարգերը չէին կարող առաջանալ նախկինում:

1. 1970–1980-ական թվականներ: Առաջին անգամ տնտեսական գործընթացների վերլուծության համար իմիտացիոն մոդելավորում կիրառեց Թ. Նեյլորը (T. H. Naylor)¹⁷: Երկու տասնամյակ այս տիպի մոդելավորումը իրական կառավարման նպատակով օգտագործելու փորձերը կրել են դրվագային բնույթ, ինչը պայմանավորված էր տնտեսական գործընթացների ձևայնացման դժվարություններով: Մասնավորապես՝

- համակարգիչների մաթեմատիկական ապահովումը չէր պարունակում **ձևայնացված լեզվային** աշակցություն բարդ ստոխաստիկ ցանցում տնտեսական գործընթացները նկարագրելու համար.
- բացակայում էին կառուցվածքային, համակարգային վերլուծության ձևայնացված մեթոդները:

Սիմուլյացիոն մոդելների ստեղծումը պահանջում էր զգալի ժամանակ (երբեմն՝ երկար տարիներ): Այդ պատճառով իմիտացիոն մոդելավորումը հիմնականում օգտագործվում էր գիտական գործունեության ընթացքում:

1970-ական թվականներին ի հայտ եկան իմիտացիոն մոդելավորման առաջին տեխնոլոգիական գործիքները, որոնք ունեին իրենց սեփական լեզվական միջոցները: Դրանցից ամենահզորը GPSS (General Purpose Simulation System - ընդհանուր նշանակության մոդելավորման համակարգ) համակարգն էր, որի միջոցով հնարավոր դարձավ մոդելավորման լեզուն օգտագործել տարբեր՝ հիմնականում զանգվածային սպասարկման համակարգերի իմիտացիոն մոդելավորման համար: Դա թույլ էր տալիս ստեղծել վերահսկվող գործընթացների և օբյեկտների՝ տեխնիկական կամ

¹⁷ Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем, Томас Нейлор, М., “Мир”, 1975.

տեխնոլոգիական բնույթի մոդելներ: GPSS համակարգը մշակել է IBM ընկերության աշխատակից Ջ. Գորդոնը՝ 1961 թ.: XX դարի վերջը նշանավորվեց Minuteman Software ընկերության ծրագրային արտադրանքով՝ GPSS World-ով, որը ստեղծվեց 1993 թ.:

2. 1980-1990-ական թվականներ: Իմիտացիոն մոդելավորման համակարգերը 80-ականներին արդեն լայնորեն օգտագործվում էին, և տարբեր երկրներում կիրառվում էր դրանց ավելի քան 20 տեսակ: Առավել տարածված էին GASP-IV-ը, SIMULA-67-ը, GPSS-V-ը և SLAM-II-ը, որոնք, սակայն, ունեին բազմաթիվ թերություններ:

Մոդելների արդյունավետությունը, որոնք ստեղծված են GASP-IV և SIMULA-67 համակարգերով, մեծ չափով կախված է մշակողների արհեստավարժությունից: Այս համակարգերը չունեն մոդելավորվող գործընթացների դինամիկան նմանակող պիտանի միջոցներ:

GPSS-V-ն օգտվողներին հնարավորություն է տալիս տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցով ստեղծելու ավարտուն, բարձր մակարդակի իմիտացիոն մոդելներ: Համակարգում գործընթացն իրականացվում է ավտոմատ կերպով՝ մեկ մոդելային ժամանակահատվածով: Օգտագործողը կարող է, ըստ անհրաժեշտության, ներմուծել իրադարձությունների համաժամանակացման սեփական կանոնները: Առկա են մոդելի կառավարման, դինամիկ կարգաբերման (debug) և արդյունքների ավտոմատ մշակման միջոցներ: Այդուհանդերձ, այս համակարգը ևս ունի թերություններ:

Առավել առաջադեմ է **SLAM-II-ը**, որը թույլ է տալիս ստեղծել բարդ դիսկրետ՝ անընդհատ գործընթացների մոդելներ: **Դրանում** կիրառվող մեթոդաբանությունն էականորեն ընդլայնեց իմիտացիոն մոդելավորման կիրառման շրջանակները, սակայն այն ևս զերծ չէ թերություններից:

3. 1990–2000 թվականներ: Այս ժամանակահատվածում իմիտացիոն մոդելավորման համակարգերի սերնդում կարելի է առանձնացնել լայնորեն տարածված հետևյալ փաթեթները.

- Process Charter-1.0.2 (Scitor ընկերություն, Մենլո Պարկ, Կալիֆորնիա, ԱՄՆ),
- Powersim-2.01 (Model Data AS ընկերություն, Բերգեն, Նորվեգիա),
- Ithink-3.0.61 (High Performance Systems ընկերություն, Հանովեր, Նյու Հմփշիր, ԱՄՆ),
- Extend+BPR-3.1 (Imagine That! ընկերություն, Սան Հոսե, Կալիֆորնիա, ԱՄՆ),
- ReThink (Gensym ֆիրմա, Քեմբրիջ, Մասաչուսեթս, ԱՄՆ),

- Matlab/Simulink (The MathWorks ընկերություն, Մասաչուսեթս, ԱՄՆ),
- Arena (Rockwell Automation ընկերություն, ԱՄՆ),
- AnyLogic (XJ Technologies ընկերություն, Ռուսաստան),
- Pilgrim (Ռուսաստան):

Process Charter-1.0.2 փաթեթն ունի մոդելների բլոկ-սխեմաներ կառուցելու «ինտելեկտուալ» գործիք: Այն կողմնորոշված է հիմնականում դեպի դիսկրետ մոդելավորում:

Powersim-2.01 փաթեթն անընդհատ մոդելներ ստեղծելու լավ միջոց է:

Itthink-3.0.61 փաթեթն ապահովում է անընդհատ և դիսկրետ մոդելների կառուցումը:

Extend+BPR-3.1 (BPR- Business Process Reengineering / բիզնես գործընթացների վերակազմավորում) փաթեթը ստեղծվել է որպես բիզնես գործընթացների վերլուծության գործիք՝ ապահովելով դիսկրետ և անընդհատ մոդելավորում:

ReThink-ը ունի Extend+BPR-3.1 փաթեթի հատկությունները և, ի տարբերություն նշված փաթեթների, ունի մոդելներ ստեղծելու գրաֆիկական լավ տրանսլատոր: Այն աշխատում է G2 էքսպերտային **թաղանթի** կառավարմամբ:

Pilgrim փաթեթն ունի մոդելավորվող օբյեկտների ժամանակային, տարածքային և ֆինանսական շարժընթացի նմանակման հնարավորությունների լայն սպեկտր, որի շնորհիվ կարելի է ստեղծել դիսկրետ-անընդհատ մոդելներ: Մշակվող մոդելներն օժտված են մոդելավորվող գործընթացների կոլեկտիվ կառավարման հատկությամբ: Համակարգն ունի համեմատաբար ցածր գին:

AnyLogic-ը բարդ համակարգերի և գործընթացների իմիտացիոն մոդելավորման ծրագրային ապահովում է: Դա ներառում է երեք հայտնի մոդելավորման մեթոդներ՝ համակարգային դինամիկա, դիսկրետ-իրադարձային մոդելավորում, գործակալային մոդելավորում:

Arena համակարգը իմիտացիոն մոդելավորման ծրագրերի շուկայի առաջատարն է: Այն օգտագործում է իմիտացիոն մոդելավորման պրոցեսոր և SIMAN լեզու: **Arena**-ն ապահովում է հարմար գրաֆիկական ինտերֆեյս՝ մոդելավորվող կառուցվածքների մի

շարք ձևանմուշներով: Մոդելի աստիճանակարգում կարող են լինել անսահմանափակ թվով մակարդակներ:

Վերոհիշյալ գործիքակազմերն ունեն ընդհանուր հատկություն՝ մոդելի գրաֆիկական կառուցման հնարավորություն: Այդ ինժեներական աշխատանքների ընթացքում հաջողվում է միևնույն գրաֆիկական սխեմայում երկրաչափական տեսքով ներկայացնել մոդելավորվող համակարգի կառավարչական (վարչական) կամ կառուցվածքային առանձնահատկությունները:

14.3. MATLAB / SIMULINK ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԱՎԻՐՃ ՆԿԱՐԱԳԻՐԸ¹⁸

MATLAB-ը (Matrix Laboratory) տեխնիկական խնդիրների հաշվարկների կատարման կիրառական ծրագրերի փաթեթ և նույնանուն ծրագրավորման լեզու է, որն օգտագործվում է այդ փաթեթում: **Simulink-ը** իմիտացիոն մոդելավորման գրաֆիկական միջավայր է, որը Matlab փաթեթի հավելված է: Այն թույլ է տալիս ուղղորդված գրաֆների տեսք ունեցող բլոկ-դիագրամների միջոցով (տեսողական ծրագրավորման սկզբունք) կառուցել դինամիկ մոդելներ, այդ թվում՝ դիսկրետ, անընդհատ և հիբրիդային, ոչ գծային և խզումներով համակարգեր:

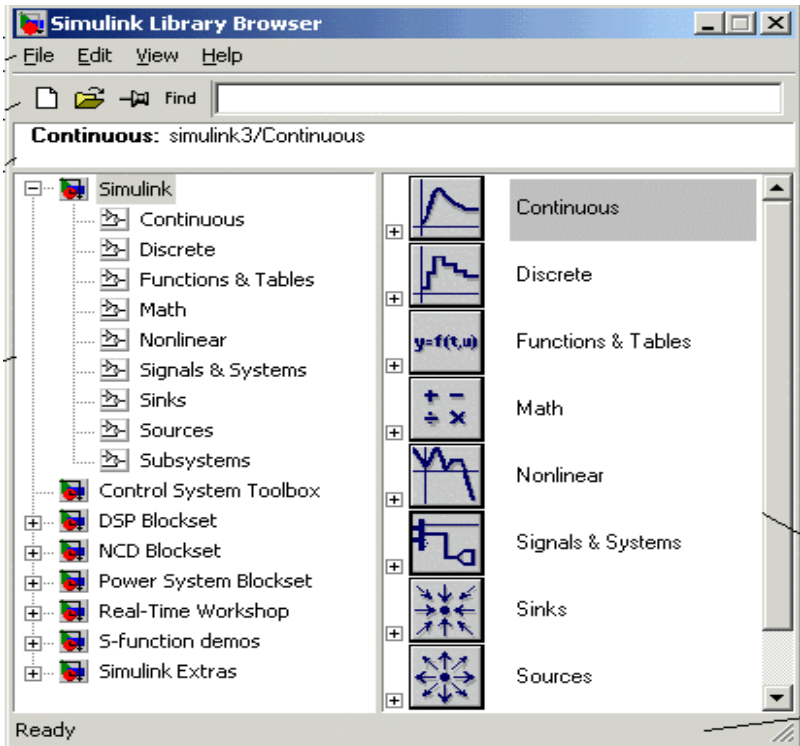
Ինտերակտիվ Simulink միջավայրը հնարավորություն է ընձեռում օգտագործելու արդեն գոյություն ունեցող բլոկների գրադարանները մեխանիկայի, ֆիզիկայի, տնտեսագիտության և այլ բնագավառների տարբեր համակարգեր մոդելավորելու համար, ինչպես նաև կիրառել զարգացած մոդելային մոտեցում, երբ մշակվում են կառավարման համակարգեր, թվային հեռահաղորդակցության միջոցներ և իրական ժամանակում աշխատող սարքեր:

Simulink-ի լրացուցիչ ընդլայնման փաթեթը թույլ է տալիս լուծել խնդիրների ամբողջական շարք՝ սկսած հայեցակարգի մշակումից, թեստավորումից, ստուգումից մինչև դրա տեխնիկական իրականացում: Քանի որ Simulink-ը միասնացած է MATLAB միջավայրին, ուստի այստեղ օգտագործվում են ներկառուցված մաթեմատիկական ալգորիթմներ, տվյալների մշակման հզոր մեթոդներ և գիտական գրաֆիկա:

Մոդելի կառուցում: Simulink Library Browser-ը (*Simulink գրադարանի դիտարկող*) պարունակում է համակարգի մոդելավորման

¹⁸ И.В.Черных, Simulink: Инструмент моделирования динамических систем.
www.matlab.exponenta.ru/simulink/book1/

համար առավել հաճախ օգտագործվող բլոկների գրադարան (գծապատկեր 14.1):



Գծապատկեր 14.1. *Simulink գրադարանի բաժինների դիտարկող*

Գրադարանում ներառված են.

- անընդհատ և դիսկրետ դինամիկ բլոկներ, ինչպիսիք են Integrator-ը (ինտեգրատոր) Unit Delay-ը (հապաղելու բլոկ),
- ալգորիթմիկ բլոկներ, ինչպիսիք են Sum-ը (գումարող), Product-ը (արտադրյալ), Lookup Table-ը (տեղեկատվական աղյուսակ),
- կառուցվածքային բլոկներ, ինչպիսիք են Mux-ը (մուլտիպլեկտոր), Switch-ը (հոսանքափոխիչ), Bus Selector-ը (ընտրող):

Simulink գրադարանը պարունակում է հետևյալ հիմնական բաժինները.

1. Continuous – անընդհատ տարրերի գրադարան (ինտեգրատոր, դիֆերենցիատոր, հասարակ դիֆերենցիալ հավասարումների գծային համակարգ և այլն),
2. Discrete – դիսկրետ տարրերի գրադարան (ինտեգրատոր՝ դիսկրետ ժամանակով, դիսկրետ զտիչ (ֆիլտր) և այլն),
3. Functions & Tables – ֆունկցիաներ և աղյուսակներ (Matlab ֆունկցիաներ, S-ֆունկցիա, բլոկ և այլն),
4. Math – մաթեմատիկական ֆունկցիաներ (բացարձակ արժեք, կոմբինատոր տրամաբանություն, կոմպլեքս թվի իրական և կեղծ բաղադրիչների բաժանում և այլն),
5. Nonlinear – ոչ գծային տարրեր (ռելեի խումբ, հոսանքափոխիչ և այլն),
6. Signals & Systems – ազդանշաններ և համակարգեր (բաղադրիչ բլոկ, մուտքային ազդանշան, ելքային ազդանշան, մուլտիպլեկսներ, դեմուլտիպլեկսներ և այլն),
7. Sinks – պատկերելու միջոցներ (ժամանակային դիագրամ, արդյունքների դուրսբերման ֆայլ, մոդելի կատարման ընդհատում և այլն),
8. Sources – ազդանշանների աղբյուր (իմպուլս/սինուսոիդ ազդանշանների գեներատոր, պատահական թվերի գեներատոր, ժամացույց և այլն),
9. Subsystems – ենթահամակարգերի բլոկներ:

Մոդելի իմիտացիա: Կարելի է իրականացնել համակարգերի դինամիկ հատկությունների ձևայնացում և դիտարկել ստացվող արդյունքները հենց ձևայնացման սկզբից: Որպեսզի արձանագրվեն սինուլյացիայի արագություն և ճշտություն, Simulink-ն ապահովում է անրագրված և փոփոխական քայլով լուծում ստանալու (իրականացնելու) ODE ֆայլը, գրաֆիկական կարգաբերիչ (debug) և մոդելի առանձին ֆունկցիաների կատարման ժամանակահատվածի գնահատման ենթաօրագիր:

Լուծում իրականացնողի ընտրություն: Լուծում իրականացնողներն ինտեգրող թվային ալգորիթմներն են, որոնք հաշվարկում են համակարգի դինամիկան որոշակի ժամանակահատվածում՝ օգտագործելով մոդելում պարունակող տեղեկատվությունը: Simulink-ը տրամադրում է համակարգերի տիպերի լայն տեսականու իմիտացիոն լուծում իրականացնողներ, այդ թվում՝ ժամանակի իրական մասշտաբում (անալոգ), դիսկրետ ժամանակի (թվային) և հիբրիդային (խառը ազդանշանով) համակարգերի ու ժամանակահատվածների ցանկացած չափերով դիսկրետացմամբ: Simulink-ում լուծում իրականացնողները կարող են կատարել կոշտ և խզումով համակարգերի իմիտացում: Կարելի է առաջարկել իմիտացիայի պայ-

մանները (օպցիա), այդ թվում՝ լուծում իրականացնողների տեսակը և հատկությունները, իմիտացիայի սկիզբը և ավարտը ու ներբեռնել կամ պահպանել իմիտացիայի տվյալները: Կարելի է նաև կարգավորել օպտիմալացնող և ախտորոշիչ տեղեկատվությունը: Մոդելի հետ միասին կարելի է պահպանել օպցիոնային տարբեր համադրություններ (ըստ ընտրության):

Հիմնական առանձնահատկությունները.

- բլոկ-դիագրամի կառուցման ինտերակտիվ գրաֆիկական միջավայր,
- պատրաստի բլոկների ընդլայնվող գրադարան,
- բազմամակարդակ, աստիճանակարգային բազմաբաղադրիչ մոդելների կառուցման միջոցներ,
- բարդ մոդելների պարամետրերի տեղեկատվական կոդմնորոշման և կարգավորման միջոցներ՝ Model Explorer,
- պատրաստի՝ C/C++, FORTRAN, ADA և MATLAB ավգորիթմների՝ մոդելի հետ միասնացման գործիքներ, մոդելավորման արտաքին ծրագրերի հետ փոխգործողություն,
- դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման արդի ձևեր՝ անընդհատ, դիսկրետ, գծային և ոչ գծային օբյեկտների համար,
- ոչ ստացիոնար համակարգերի իմիտացիոն մոդելավորում՝ հաստատում և փոփոխվող քայլով լուծում իրականացնողների օգնությամբ կամ MATLAB-ից կառավարվող մոդելավորման փաթեթով,
- ելքային ազդանշանների ինտերակտիվ արտացոլում, կարգավորման գործիքներ և մուտքային ազդեցությունների առաջադրանք,
- մոդելները կարգաբերելու և վերլուծելու միջոցներ,
- լիարժեք միասնացում MATLAB-ին՝ ներառյալ թվային մեթոդները, արտացոլումը, տվյալների վերլուծությունը և գրաֆիկական ինտերֆեյսները:

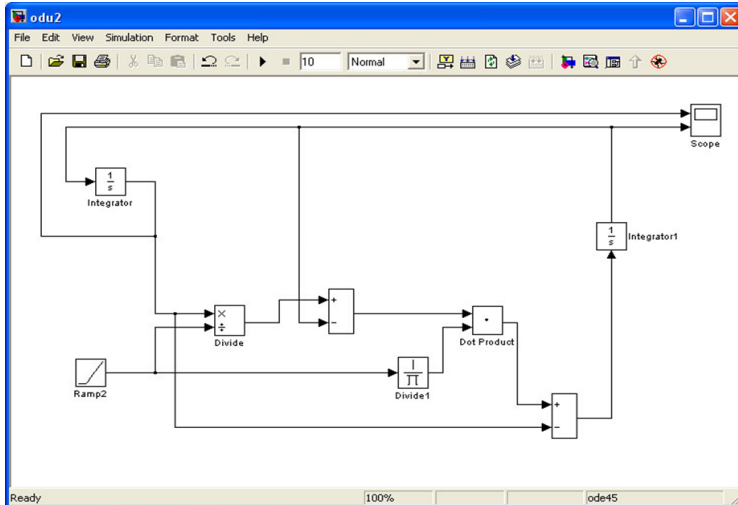
Դիտարկենք Simulink-ում օրինակի ստեղծումը:

2-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ

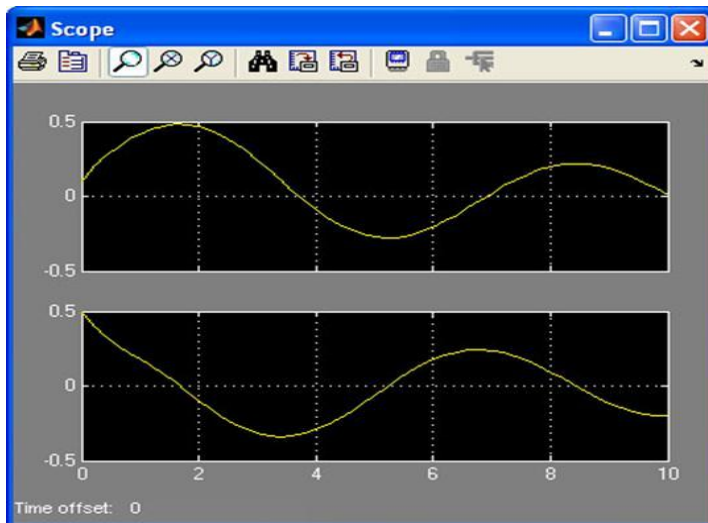
Տրված է հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \left(\frac{y_1}{x} - y_2 \right) \frac{1}{x} - y_1 \end{cases} :$$

Լուծենք այն MATLAB փաթեթի Simulink ծրագրով.



Տրված հավասարումների համակարգում X -ը փոխվում է գծայնորեն՝ 1-ից մինչև 10: Նաև անհրաժեշտ է կառուցել հակառակ կապը ինտեգրատորի ելքային և X փոփոխականի նոր արժեքների միջև: Անպայման պետք է ինտեգրատորում ներածել նախնական՝ $y_1(0) = 0.1$, $y_2(0) = 0.5$ արժեքները:



Արդյունքում կստանանք երկու գրաֆիկ: Նշենք այն գրադարանները, որտեղից վերցված են օգտագործված բլոկները:

Ramp – Sources-ից: Ձևավորում է գծային ազդանշան: Գործակիցների բոլոր արժեքները պետք է հավասար լինեն 1-ի:

Integrator – Continuous-ից: Գտնում ենք մուտքագրման ազդանշանի ինտեգրալը: Պետք է առաջադրել նախնական արժեքները՝ (Initial Condition) $y_1 = 0.1$, $y_2 = 0.5$:

Add – Math Operations-ից: Պարամետրերը սահմանելիս ընտրում ենք անհրաժեշտ գործողությունները:

Divide – Math Operations-ից: Առաջին մուտքագրվող մեծությունը բաժանում ենք երկրորդի վրա:

Dot Product – Math Operations-ից: Արտադրյալ:

Scope – Sinks-ից: Արդյունքի արտածում՝ ժամանակից կախված ազդանշանի ֆունկցիայի տեսքով:

14.4. ԻՄԻՏԱՑԻՈՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՏԵՍԱԿՆԵՐԸ¹⁹

Գոյություն ունի իմիտացիոն մոդելավորման երեք տեսակ.

- **Գործակալային (ազենտային) մոդելավորումը** համեմատաբար նոր (1990–2000 թթ.) ուղղություն է իմիտացիոն մոդելավորման տեսությունում, որն օգտագործվում է այնպիսի ապակենտրոնացված համակարգեր ուսումնասիրելու համար, որոնց դինամիկ գործողությունը որոշվում է ոչ թե համընդհանուր (գլոբալ) կանոններով և օրենքներով (ինչպես մոդելավորման ուրիշ պարադիգմաներում), այլ հակառակը, երբ գլոբալ կանոնները և օրենքները առանձին խմբի անդամների գործունեության արդյունք են: Գործակալային մոդելավորման նպատակն է պատկերացում ստանալ այդ գլոբալ կանոնների և համակարգի ընդհանուր վարքագծի մասին՝ ելնելով համակարգում առանձին ակտիվ օբյեկտների անհատական, մասնակի վարքագծից և դրանց փոխգործակցությունից: Գործակալն անձ է, որն ակտիվ է և բնութագրվում է ինքնուրույն վարքով, կարող է կայացնել որոշումներ՝ համաձայն որոշակի կանոնների, համագործակցել իր միջավայրի հետ, ինչպես նաև ինքնուրույն փոխվել:

- **Դիսկրետ-իրադարձայինը** մոդելավորման ձև է, որն առաջարկում է վերացական մոտեցում, երբ դիտարկվում են անընդհատ բնույթի իրադարձություններ և ուսումնասիրվում մոդելավորման

¹⁹ Кельтон В., Лой А., К34 Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. – СПб.; Питер: Киев: Издательская группа BHV, 2004, 847 с.

համակարգի միայն հիմնական իրադարձությունները, ինչպիսիք են «սպասում», «պատվերի սպասարկում», «բեռով շարժ», «բեռնաթափում» և այլն: Դիսկրետ-իրադարձային մոդելավորումն առավել զարգացած է և ունի կիրառման մեծ շրջանակ՝ սկսած լոգիստիկայից և զանգվածային սպասարկման համակարգերից մինչև տրանսպորտային և արտադրական համակարգեր: Այս տեսակի մոդելավորումն առավել հարմար է արտադրական գործընթացների համար: Այն առաջարկվել է 1960-ական թվականներին Ջ. Գորդոնի կողմից:

• **Համակարգային դինամիկան** մոդելավորման պարադիգմա է, որտեղ ուսումնասիրվող համակարգերի համար կառուցվում են պատճառահետևանքային հարաբերությունների և որոշ պարամետրերի՝ այլ պարամետրերի վրա ժամանակի ընթացքում գլոբալ ազդեցության գրաֆիկական դիագրամներ, այնուհետև վերջիններիս հիման վրա կառուցված մոդելները նմանակվում են համակարգչով: Ի դեպ, այս տեսակի մոդելավորումը, ավելի քան որևէ այլ պարադիգմա, օգնում է հասկանալ, թե ինչ է կատարվում, ինչպես բացահայտել պատճառահետևանքային հարաբերություններն օբյեկտների և երևույթների միջև: Համակարգային դինամիկայի օգնությամբ կառուցվում են բիզնես գործընթացների, քաղաքի զարգացման, արտադրության, վերարտադրության շարժընթացի բնապահպանական, համաճարակի տարածման այլ մոդելներ: Մեթոդն առաջարկել է Ջ. Ֆորեստերը 1950 թ.:

14.5. ԳԵՐԱՐՏԱԴՐՈՒԹՅԱՆ ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ԳՃԱՆԺԱՄԻ ՊԱՐԶ ԻՄԻՏԱՑԻՈՆ ՄՈԴԵԼԸ SIMULINK-ՈՒՄ

Համաշխարհային փորձը ցույց է տալիս, որ շուկայական տնտեսական համակարգն օրինաչափորեն զարգանում է՝ հավասարակշիռից անցնելով անհավասարակշիռ վիճակի: Վերջին երկու դարերի և XXI դարի սկզբի տնտեսական պատմությունը տալիս է այդ անկայունության բազմաթիվ օրինակներ: Արդյունաբերության զարգացման և տնտեսական բարգավաճման ժամանակահատվածին միշտ հետևում է անկման փուլը, որն ուղեկցվում է արտադրության կրճատմամբ և գործազրկությամբ:

Առաջին համաշխարհային տնտեսական ճգնաժամից հետո տնտեսագետ գիտնականները փորձում են գտնել այն պատճառները, որոնց հետևանքով տնտեսությունը դուրս է գալիս հավասարակշռությունից և բացատրել, թե ինչու է որոշակի ժամանակամիջոցից հետո դա կրում պարբերական բնույթ:

Գործարար (բիզնես) պարբերաշրջանը տնտեսական ակտիվության պարբերական տատանումներն են (իրական ՀՆԱ տեսքով): Տնտեսության զարգացման նման առանձնահատկությունները կապված են մարդկանց գործողությունների՝ նրանց նպատակների և դրանց իրականացման փոփոխվող միջոցների հետ:

Պարբերաշրջանն իր հերթին բաժանվում է չորս փուլի՝ ճգնաժամ, դեպրեսիա, վերականգնում (աշխուժացում) և աճ: Ընդ որում, հիմնական փուլն է ճգնաժամը, որով սկսվում և ավարտվում է արդյունաբերական պարբերաշրջանը: Ճգնաժամը խթանում է տնտեսության զարգացումը, բայց դա այնպես է ընթանում, որ, ի վերջո, նախապատրաստվում է նոր ճգնաժամ:

Նորդասական և մոնետար դպրոցների ներկայացուցիչները կարծում են, որ պարբերաշրջանները տնտեսական համակարգերի վրա պատահական ազդեցությունների հետևանք են (խթաններ կամ ցնցումներ), որոնք էլ հանգեցնում են արձագանքման պարբերաշրջանային մոդելին:

Տնտեսագետների շրջանում չկա միակարծություն այս երևույթի էության վերաբերյալ: Ըստ նորդասականների և քեյնսականների՝ պարբերաշրջանների առաջացման հիմնական պատճառներից է կապիտալի պաշարների հարմարեցումը վերարտադրության գործընթացին, իսկ դրանք, իրենց հերթին, փոխվում են այդ հարմարեցման ազդեցությամբ: Ենթադրվում է, որ, մի կողմից, ամեն տարի վերարտադրվող արժեքի ծավալի՝ «հոսքերի» և մյուս կողմից՝ տվյալ պահին դրա կուտակման՝ «պաշարի» միջև գոյություն ունի «հավասարակշիռ» համամասնություն: Քանի դեռ այն խախտված չէ, պարբերաշրջանային տատանումներ չեն կարող լինել: Եվ ընդհակառակը, քանի որ տատանումներ կան, ապա դա նշանակում է, որ հոսք/պաշար փաստացի համամասնությունը շեղվում է հավասարակշիռ մեծության մի կողմից դեպի մյուս կողմը: Ընդ որում, տեղի են ունենում և՛ արտադրության, և՛ կապիտալի տատանումներ: Չարկ է նշել, որ որոշ տնտեսագետներ (ափսոսիական տնտեսագիտական դպրոց) կարծում են, որ տնտեսական պարբերաշրջանը շուկայական տնտեսության մաս չի կազմում, այլ հետևանք է տվյալ երկրի կենտրոնական բանկի գործունեության և խորանում է պետության միջամտության բոլոր հնարավոր տարբերակների պատճառով:

14.6. ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ՊԱՐԲԵՐԱՇՐՋԱՆՆԵՐԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼԸ

Հակիրճ նկարագրենք Պ. Սամուելսոնի և Ջ. Հիքսի (մուլտիպլիկատոր (բազմարկիչ)-ակսելերատոր) մոդելը, որը ներառում է միայն ապրանքների (բարիքների) շուկան, ուստի ենթադրվում է, որ գների մակարդակը և տոկոսադրույքը հաստատուն են, իսկ բարիքների առաջարկի ծավալը՝ բացարձակ առաձգական (էլաստիկ):

Տնային տնտեսությունների C_t սպառման ծավալը t ընթացիկ ժամանակահատվածում կախված է դրան նախորդող՝ $t-1$ ժամանակահատվածի եկամուտներից.

$$C_t = C_{a,t} + C_y \cdot y_{t-1},$$

որտեղ C_a -ն սպառումն է, C_y -ը՝ սպառման սահմանային հակումն ըստ եկամտի, y -ը՝ ազգային եկամտի իրական արժեքը:

Ձեռնարկատերերը (մատակարարները) իրականացնում են $I_{a,t}$ ներդրումներ, որոնց ծավալը տրված տոկոսադրույքի դեպքում ամրագրված է, և I_t ներդրումներ՝ կախված նախորդ ժամանակաշրջանում համախառն պահանջարկի աճից.

$$I_t = I_{a,t} + \eta \cdot (y_{t-1} - y_{t-2}),$$

որտեղ $\eta = \Delta K / \Delta y$ -ն գործակից է, որը ցույց է տալիս, թե քանի միավոր լրացուցիչ կապիտալ է անհրաժեշտ լրացուցիչ միավոր արտադրանք արտադրելու համար (աքսելերատոր): Տրված η -ի դեպքում արտադրության ծավալը y_0 -ից մինչև y_1 ավելացնելու համար անհրաժեշտ ներդրումների ծավալն է.

$$I_t = I_{a,t} + \eta \cdot (y_{t-1} - y_{t-2}), \quad I^{in} = \eta \cdot (y_1 - y_0):$$

Այսպիսով՝

$$y_t = C_{a,t} + C_y \cdot y_{t-1} + I_{a,t} + \eta \cdot (y_{t-1} - y_{t-2}) = (C_y + \eta) \cdot y_{t-1} - \eta \cdot y_{t-2} + A_t, \quad (14.1)$$

որտեղ $A_t = C_{a,t} + I_{a,t} + G_t$, G_t -ն պետական ծախսերի իրական ծավալն է:

(14.1) հավասարումը ոչ համասեռ **վերջավոր-տարբերանքային** (*finite-difference*) երկրորդ կարգի հավասարում է, որը բնութագրում է ազգային եկամտի y_t շարժընթացը (դինամիկան) ժամանակի ընթացքում:

Ծախսերի ամրագրված մեծությունների ($A_t = A = \text{const}$) դեպքում տնտեսությունում հաստատվում է դինամիկ հավասարակշռություն, երբ ազգային եկամտի ծավալը կայունանում է որոշակի $\bar{y}$ մակարդակի վրա, այսինքն՝ $y_t = y_{t-1} = y_{t-2} = \dots = y_n = \bar{y}$, որտեղ n -ը ծախսերի անփոփոխ A մեծությամբ ժամանակահատվածների քանակն է:

(14.1)-ից հետևում է, որ $\bar{y} = A/(1 - C_y)$: Վերլուծենք, թե ինչպես իրեն կդրսևորի ազգային եկամտի շարժընթացը, եթե դինամիկ հավասարակշռության վիճակում փոփոխվի C_a մեծությունը: Գրենք համասեռ հավասարում, (14.1)-ի մեջ ընդունելով՝ $A_t = 0$ և նշանակելով՝ $\Delta y_t = y_t - \bar{y}$.

$$\Delta y_t = (C_y + \eta) \cdot \Delta y_{t-1} - \eta \cdot \Delta y_{t-2} : \quad (14.2)$$

(14.2)-ը ներկայացնում է երկրորդ աստիճանի համասեռ վերջավոր-տարբերանքային (finite-difference methods (FDM)) հավասարում՝ հաստատում գործակիցներով: Քանի որ $y_t = \bar{y} = \Delta y_t$, ապա y_t -ի փոփոխման ուղղությունը որոշվում է ըստ Δy_t հավելման փոփոխման ուղղության:

Դիֆերենցիալ և վերջավոր-տարբերանքային հավասարումների տեսությունից հայտնի է, որ Δy_t փոփոխության բնույթը կախված է (14.2)-ից ստացվող բնութագրիչ հավասարման դիսկրիմինանտից: Քանի որ (14.2)-ը կարելի է ձևափոխել հետևյալ տեսքով.

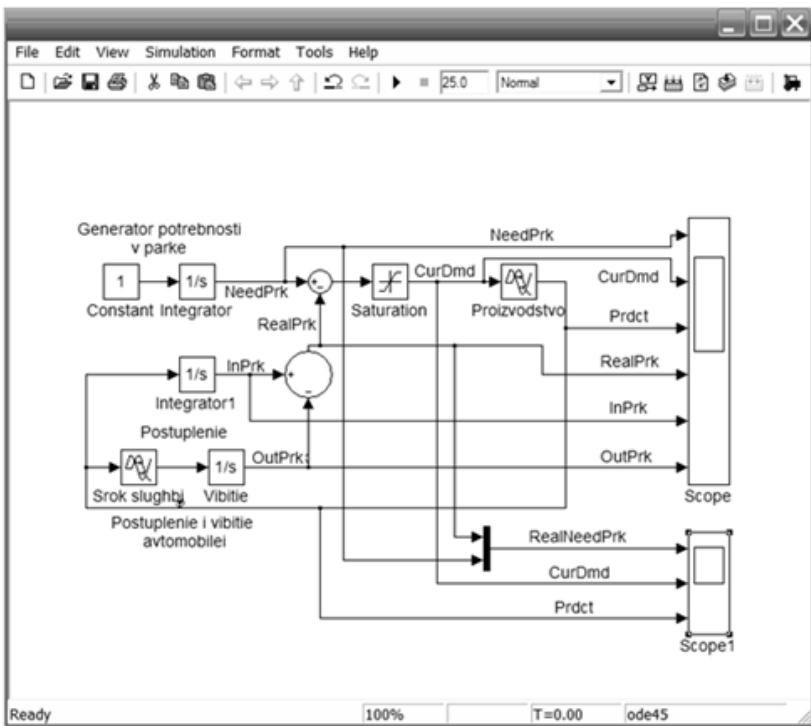
$$y''_t - (C_y + \eta) \cdot y'_t - \eta \cdot y = 0, \quad (14.3)$$

ապա բնութագրիչ հանրահաշվական հավասարումը կլինի.

$$\lambda^2 - (C_y + \eta) \cdot \lambda - \eta = 0 : \quad (14.4)$$

(14.4) հավասարման դիսկրիմինանտը կլինի՝ $D = (C_y + \eta)^2 - 4 \cdot \eta$: Ուստի ազգային եկամտի շարժընթացը կախված է սպառման նկատմամբ սահմանային հակումից, որը որոշում է $(C_y + \eta)$ **բազմապատկի** և η **արագացուցչի** արժեքը: Եթե $D > 0$, ապա y_t -ն մոնոտոն է փոփոխվում, եթե $D < 0$ ՝ տատանողական:

Կախված (14.4) հավասարման մեջ η -ի մեծությունից՝ y_t -ի արժեքը ձգտում է որոշակի վերջավոր արժեքի կամ $y \rightarrow \infty$: Եթե $\eta < 1$, ապա հավասարակշռությունը հաստատվում է որոշակի մակարդակում: Եթե $\eta > 1$, ապա մեկ անգամ խախտված հավասարակշռությունն այլևս չի վերականգնվի: Եթե $\eta = 1$, ապա y_t -ի արժեքը կտատանվի վերջավոր **ամպլիտուդով** (տատանման մեծությամբ):



Պարբերաշրջանների և ճգնաժամերի իմիտացիոն մոդելների կառուցվածքային նկարագիրը Simulink-ում ներկայացված է հետևյալ տեսքով՝ որպես պարբերաշրջանների և ճգնաժամերի վերլուծության Simulink մոդել:

14.7. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՄԱԿՐՈՏԵՏԵՍԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿԱՅԻՆ ԻՄԻՏԱՑԻՈՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐ

Բազմաթիվ երկրների դրամավարկային կարգավորման մարմիններ (դա վերաբերում է նաև Հայաստանին) վաղուց ի վեր մշակում և օգտագործում են տնտեսամաթեմատիկական մոդելավորման և կանխատեսման մեթոդներ՝ դրամավարկային քաղաքականության բազմատեսակ տարբերակներ վեր հանելու, արդյունավետ լուծումներ գտնելու նպատակով:

Արտասահմանյան երկրների կենտրոնական բանկերի մակրոտնտեսական մոդելները 1960-ից մինչև այժմ ենթարկվել են էական փոփոխությունների: 1960-1980-ական թթ. ակտիվորեն օգտագործվել են էկոնոմետրիկ (տնտեսաչափական), առաջին հերթին՝ **ադապտիվ** և **ռացիոնալ** սպասումներով մոդելներ: Այդ մոդելները, սակայն, ի վիճակի չէին համարժեք կերպով կանխատեսելու տնտեսության կառուցվածքային փոփոխությունների հետևանքները, համախառն առաջարկի և արտաքին ցնցումները: Բացի այդ, դրանցով կանխատեսման հնարավորությունը հիմնված էր նախորդ տվյալների վրա: Էական թերությունն այն էր, որ բացակայում էր տնտեսավարող սուբյեկտների վարքագծի բնութագիրը, ինչը բացասաբար էր ազդում կանխատեսումների ճշգրտության վրա:

Նման իրավիճակը ստիպեց մշակել տնտեսական գործընթացներն ավելի համարժեքորեն մոդելավորող և կանխատեսող մոդ գործիքակազմ: Սկսած 1990-ական թվականներից՝ մակրոէկոնոմետրիկ մոդելներն իրենց տեղը զիջեցին ընդհանուր հավասարակշռության հաշվարկային և ստոխաստիկ մոդելներին, որոնք հիմնված էին տնտեսական գործակալների վարքագծի վրա, հաշվի էին առնում դրանց փոխազդեցությունը: Այսօր ընդհանուր հավասարակշռության հաշվարկային և ստոխաստիկ մոդելներն ակտիվորեն օգտագործվում են ԱՄՆ-ի դաշնային պահուստային համակարգի, Անգլիայի բանկի, մի շարք այլ եվրոպական երկրների կենտրոնական բանկերի, ինչպես նաև Արժույթի միջազգային հիմնադրամի կողմից:

14.8. FRB/US ԵՎ ԱՄՆ-Ի ԴԱՇՆԱՅԻՆ ՊԱՅՈՒՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ SIGMA ՍՈՂԵԼՆԵՐԸ

Այս մոդելները պատկանում են ընդհանուր հավասարակշռության ստոխաստիկ դինամիկ դասին՝ համատեղելով էկոնոմետրիկ մոտեցումն ընդհանուր հավասարակշռության տեսության հետ: Ռացիոնալ սպասումների տեսության ի հայտ գալուց և պրոֆետոր Ռ. Լուկասի²⁰ քննադատությունից հետո ԱՄՆ-ի դաշնային պահուստային համակարգն աստիճանաբար սկսեց իր մակրոտնտեսական մոդելների նկատմամբ կիրառել ընդհանուր հավասարակշռության մեթոդաբանություն: Համապատասխանաբար՝ ԱՄՆ-ի տնտեսության **FRB/US** մակրոտնտեսական մոդելը վերափոխվել է ռացիոնալ սպասումների, միջժամանակային օպտիմալացման և դինամիկ հավասարակշռության նոր գործիքակազմերով: Դրանց հիման վրա մոդելը հաշվարկում է ԱՄՆ-ի տնտեսության հիմնական մակրոտնտեսական ցուցանիշների հավասարակշիռ և ստացիոնար հետագծերը՝ դրամավարկային քաղաքականության բազմատեսակ տարբերակների իրականացման դեպքում:

2005 թ. ԱՄՆ-ի դաշնային պահուստային համակարգի փորձագետները մշակել են նոր **ընդհանուր հավասարակշռության հավանականային դինամիկ Sigma մոդելը**: SIGMA մոդելի վերջին տարբերակը ներառում է առանձնացված բլոկներ ինչպես ԱՄՆ-ի²¹, այնպես էլ այլ երկրների տնտեսությունների կամ տարածաշրջանների համար, ինչպիսիք են եվրոյի գոտին, ճապոնիան, Կանադան, Մեքսիկան, Ասիայի զարգացող երկրները և մնացած աշխարհը: Մոդելը զնահատում է ոչ միայն ներքին համախառն պահանջարկի և առաջարկի, այլև ուրիշ երկրների իրական, առևտրային և ֆինանսական հատվածների փոփոխությունների ազդեցությունն ԱՄՆ-ի տնտեսության մակրոտնտեսական ցուցանիշների վրա: Այս դասի մոդելներ մշակել և օգտագործում են նաև Անգլիայի բանկը²² և Արժույթի միջազգային հիմնադրամը: Նման մշակումներ են իրականացնում նաև զարգացած (Կանադա, Ֆինլանդիա, Իտալիա, Նոր-

²⁰ Lucas R.E., Jr. (1976): Econometric Policy Evaluation: A Critique. In: Brunner K., Meltzer A., The Phillips Curve and Labor Markets, Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. 1. N.Y.: American Elsevier.

²¹ Erceg Ch.J., Guerrieri L., Gust Ch. (2006): SIGMA: A New Open Economy Model for Policy Analysis / International Finance Discussion Paper № 835 (Revised). Washington (D.C.): Board of Governors of the Federal Reserve System.

²² Harrison R., Nikolov K., Quinn M. et al. (2005): The Bank of England Quarterly Model. L.: Bank of England.

վեգիա, Իսպանիա) և զարգացող (Բրազիլիա, Չիլի, Չեխիայի Հանրապետություն) երկրների կենտրոնական բանկերը:

Արժույթի միջազգային հիմնադրամի Multimod և GEM (Global Economy Model / համաշխարհային տնտեսության մոդել) մոդելները: 2002–2003 թթ. ընթացքում ԱՄՅ փորձագետները մշակեցին նոր՝ **ընդհանուր հավասարակշռության մակրոտնտեսական բազմերկրային GEM**²³ մոդելը: Ի տարբերություն իր նախորդի՝ **MULTIMOD** ռացիոնալ ակնկալիքներով քայնասական մակրոէկոնոմետրիկ մոդելի, **GEM-ը** հիմնված է գործակալների վարքի միկրոտնտեսական տեսության (սպառողների օգտակարության և արտադրողների շահույթի մաքսիմալացման) և ընդհանուր տնտեսական հավասարակշռության տեսության վրա: Մոդելը, մասնավորապես, թույլ է տալիս գնահատել ԱՄՆ-ի տնտեսության կառուցվածքային բարեփոխումների ազդեցությունը ԱՄՆ-ի և Եվրամիության աշխատանքի ու ապրանքային շուկաներում մրցակցության աճի վրա, վերլուծել օպտիմալ դրամավարկային քաղաքականության ռեժիմների տարբերությունները և առանձնահատկությունները զարգացած ու զարգացող երկրներում, ինչպես նաև ուսումնասիրել նավթի գնի տատանումների անդրադարձը զարգացած արդյունաբերական երկրների տնտեսությունների վրա:

Ընդհանուր հավասարակշռության հաշվարկային մոդելների ընդհանուր բնութագրերը: Վերջին 50 տարիների ընթացքում աշխարհում ձևավորվեց և լայն տարածում ստացավ նոր ուղղություն կիրառական տնտեսագիտությունում, որը թույլ տվեց մի շարք խնդիրներ լուծելու ուղիներ գտնել, որոնք հիմնականում վերաբերում էին տնտեսության պետական կարգավորմանը: Այդ ուղղության հիմքն է տնտեսական գործընթացների մոդելավորման նկատմամբ սկզբունքորեն նոր մոտեցումը՝ դրա համար ստեղծելով, այսպես կոչված, **ընդհանուր հավասարակշռության հաշվարկային մոդելներ (Computable General Equilibrium models - CGE models):**

CGE մոդելը ներկայացնում է հավասարումների համակարգ, որի լուծումն է ընդհանուր տնտեսական հավասարակշռությունը, որը ստացվում է, երբ դիտարկվող մոդելում յուրաքանչյուր ապրանքի շուկայում ձևավորվում է առաջարկի և պահանջարկի հավասարություն: Այսպիսով՝ CGE մոդելն իմիտացում է տնտեսական շուկաների գործունեությունն այն ենթադրությամբ, որ շուկայական մեխանիզմներն ապահովում են հավասարակշռություն տնտեսության ներքին շուկաներում:

²³ GEM (2004): GEM: A New International Macroeconomic Model. Washington (D.C.): International Monetary Fund. pdf.

CGE մոդելներն ունեն երեք հիմնական հատկանիշներ: *Առաջին*՝ դրանք ընդգրկում են այն տնտեսավարող սուբյեկտները, որոնց գործունեության արդյունքներն արտացոլվում են ամբողջ տնտեսական համակարգի վրա: Ահա թե ինչու են CGE մոդելները կոչվում **ընդհանուր**: Սովորաբար, գործակալների շարքում ներառվում են տնային տնտեսությունները, որոնք մաքսիմալացնում են ձեռք բերված ապրանքներից և ծառայություններից ստացված օգտակարությունը, և ձեռնարկությունները, որոնք ձգտում են առավելագույնի հասցնել իրենց շահույթը: Որպես տնտեսական գործակալներ են հանդես գալիս նաև կառավարությունները և արևտրային միությունները: *Երկրորդ*՝ CGE մոդելները ներառում են հավասարումների համակարգ, որի լուծումներն են գները, որոնք հավասարակշռում են առաջարկը և պահանջարկը **յուրաքանչյուր** արտադրանքի (ապրանքի), ծառայության և արտադրական գործոնի շուկայում: Այդ պատճառով այս մոդելները կոչվում են **հավասարակշիռ**: *Երրորդ*՝ այդ մոդելների օգնությամբ կարելի է ստանալ քանակական արդյունքներ, ինչը թույլ է տալիս դրանք անվանել **հաշվարկային**:

Վերջին տարիներին ժամանակակից մակրոտնտեսական վերլուծությունում կարևոր տեղ են զբաղեցնում **ընդհանուր հավասարակշռության դինամիկ ստոխաստիկ մոդելները (DSGE)**: DSGE մոդելների ձևավորումը սկիզբ է առել Կիդլանդի ու Պրեսկոտի²⁴ կողմից մշակված իրական բիզնես պարբերաշրջանների տեսությունից: Ժամանակակից մոդելները կառուցվում են նորթեյնսյան մոտեցման հետ սերտորեն միասնացած, որի դեպքում ներդրվում են իրական և անվանական «կոշտությունների» ընդարձակ հավաքածուներ: Այդ հատկությունները թույլ են տալիս մոդելներում ապահովել պատշաճ համաձայնեցվածություն փորձնական տվյալների հետ, և դրանք ժամանակային շարքերի կանխատեսման հնարավորությամբ չեն զիջում զուտ էկոնոմետրիկական մոդելներին:

14.9. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿԱՅԻՆ ՍՈՂԵԼՆԵՐԻ ԳՈՐԾԻՔԱԿԱԶՄԻ ԱՌԱՎԵԼՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Մասնակի հավասարակշռության մոդելները հաշվի չեն առնում տնտեսության մի շարք կարևոր կապեր, ինչպես նաև սահմանա-

²⁴ Kydland F., Prescott E.C., Time to Build and Aggregate Fluctuations // *Econometrica*. 1982. 50 (6). P. 1345–1370.

փակված են մեծ թվով «այլ հավասար» պայմաններով, ինչը կտրուկ նեղացնում է դրանց օգտագործման շրջանակները: Օրինակ՝ յուրաքանչյուր ապրանքի կամ ծառայության գնի կամ սակագնի փոփոխությունն ազդում է ոչ միայն դրա նկատմամբ պահանջարկի, այլև առաջարկի վրա, որի փոփոխությունն էլ, իր հերթին, անդրադառնում է այլ ապրանքների նկատմամբ պահանջարկի վրա:

Միջոյնդային հաշվեկշռի մոդելները և մաթեմատիկական ծրագրավորման գործիքները կիրառելի էին հատկապես 1950–1960-ական թթ. Արևմուտքում և շատ ավելի երկարատև՝ Խորհրդային Միությունում:

Այդ գործիքների առավելությունն այն է, որ դրանք նկարագրում են բազմաոլորտ տնտեսությունը, գնահատում ամեն մի ոլորտի քանակական ցուցանիշների փոփոխությունների ազդեցությունն ամբողջ տնտեսության վրա: Սակայն, այդ գործիքներն անտեսում են գների դերը որպես առաջարկը և պահանջարկը որոշող և հավասարակշռող հիմնական գործոն շուկայական և խառը տնտեսություններում: Ընդհանուր հավասարակշռության հաշվարկային մոդելներում թե՛ քանակական ցուցանիշները, թե՛ գներն **էնդոգեն** են որոշվում, ինչը դրանք դարձնում է տնտեսական մոդելավորման և կանխատեսման ավելի ճշգրիտ և ազդու գործիք:

Այժմ լայնորեն տարածված են մակրոէկոնոմետրիկական մոդելները, որոնք նկարագրում են տնտեսության իներցիոն վիճակը՝ հիմնվելով նախկին տվյալների վրա, և դրանց միջոցով կարելի է ստանալ կարճաժամկետ կանխատեսումներ: Այդ մոդելների թերությունն այն է, որ դրանք հիմնված են բացառապես նախկին տվյալների վրա և գրեթե ոչ մի «ուշադրություն» չեն դարձնում գործակալների վարքագծի մակրոտնտեսական կողմերին. հետազոտողն ինքն է որոշում՝ ինչ պարամետրեր ներառել և ինչ պարամետրեր չներառել ռեգրեսիոն հավասարման մեջ: Հետևաբար՝ դրանք չեն կարող համարժեքորեն կանխատեսել այնպիսի տնտեսական պարամետրերի հանկարծակի փոփոխություններ, ինչպիսիք են, օրինակ, նավթի գնի կտրուկ աճը 1970-ական թթ. սկզբին և դրա ազդեցությունը տնտեսական գործակալների վարքագծի վրա: CGE մոդելները հաշվի են առնում տնտեսավարող գործակալների վարքագիծը (սպառողների կողմից՝ օգտակարության, արտադրողների կողմից՝ շահույթի մաքսիմալացումը և այլն) և հաշվարկում են հավասարակշռությունը բոլոր շուկաներում, ինչը թույլ է տալիս դրանց օգնությամբ վերլուծել տնտեսական երևույթների ու հարաբերությունների առավել լայն շրջանակ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Թավադյան Ա., Տնտեսամաթեմատիկական մոտճելակերպ՝ տնտեսամաթեմատիկական խնդիրների լուծման արդյունավետ մեթոդ, «Գիտության աշխարհում», 4-2014, ՀՀ ԳԱԱ:
2. Սահակյան Մ., Սարգսյան Հ., Սարգսյան Ս., Տոնոյան Ռ., Տնտեսամաթեմատիկական վերլուծության մաթեմատիկական եղանակներ, մաս 1-ին, մաս 2-րդ, Երևան, 1997, 2001:
3. Васильев Ф.П., Методы оптимизации, М., 2001.
4. Вэриан Х.Р., Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход, М., «Юнити», 1997.
5. Еремин И.И., Двойственность линейной оптимизации, Екатеринбург, 2001.
6. Данилов-Данильян В.И., Экономико-математический энциклопедический словарь, М., 2003.
7. Зангвилл У.И., Нелинейное программирование. М., 1973.
8. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н., Математические методы в экономике, М., 1997.
9. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М., 2003.
10. Кельтон В., Лоу А., Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд., Питер: Киев: Издательская группа BHV, 2004.
11. Колемаев В.А., Математическая экономика. М., «Юнити», 2005
12. Крушевский А.В., Теория игр., Киев, 1977.
13. Кундышева Е.С., Математическое моделирование в экономике, Москва, 2007.
14. Лопатников А.И., Экономико-математический словарь, изд «Дело», 2003.
15. Мулен Э., Теория игр с примерами из математической экономики: Пер. с франц., М., «Мир», 1985.
16. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
17. Оуэн Г., Теория игр, М., «Мир» 1971.
18. Пиндайк Р., Рубинфельд Д., Микроэкономика 5-е изд., 2002.
19. Самуэль, Боулз, Микроэкономика. Поведение, институты и эволюция, М., «Дело» АНХ, 2010.
20. Снетков Н.Н., Имитационное моделирование экономических процессов, М., изд. центр ЕАОИ, 2008.
21. Тавадян А.А., Интервалы неопределенности экономики, М., «Наука», 2012.
22. Томас, Нейлор, Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем, М., «Мир», 1975.
23. Уиллард И. Зангвилл, Нелинейное программирование, перевод с английского Д.А.Бабаева, под редакцией Е.Г. Гольштейна, М., «Советское Радио», 1973.

24. Экономико-математические методы и прикладные модели, под редакцией Федосеева В.В., М., 2013.
25. Экономико-математическое моделирование. Учебник для студентов вузов. Под. общ. ред. Дрогобыцкого И.Н., М., "Экзамен", 2006.
26. Chiang, Alpha C., Elements of Dynamic Optimization, Waveland, 1992.
27. Chiang, Alpha C.; Kevin Wainwright. Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw-Hill Irwin., 2005.
28. Erceg Ch.J., Guerrieri L., Gust Ch.: SIGMA: A New Open Economy Model for Policy Analysis / International Finance Discussion Paper № 835 (Revised). Washington (D.C.): Board of Governors of the Federal Reserve System, 2006.
29. GEM : GEM: A New International Macroeconomic Model. Washington (D.C.): International Monetary Fund, 2004.
30. Hadley G., Nonlinear and Dynamic Programming, Addison-Wesley publishing company, 1964.
31. Harrison R., Nikolov K., Quinn M. et al.: The Bank of England Quarterly Model. L.: Bank of England, 2005.
32. Holcombe, R., Economic Models and Methodology, New York: Greenwood Press, 1989.
33. Intriligator M.D., Arrow K.S., Handbook of Mathematical Economics, University of California, Stanford, 2009.
34. Kydland F., Prescott E.C. Time to Build and Aggregate Fluctuations // Econometrica. 1982.
35. Michael Carter. *Foundations of Mathematical Economics*, MIT Press, 2001.
36. Morishima, Michio, The Economic Theory of Modern Society, New York: Cambridge University Press, 1976.
37. Thijs Ten Raa, Input–output economics: theory and applications: featuring Asian economies, World Scientific, 2009.

Տնտեսամաթեմատիկական մեթոդներ և մոդելներ
(ուսումնական ձեռնարկ)

ԱՇՈՏ ԹԱՎԱԴՅԱՆԻ
ընդհանուր խմբագրությամբ

Խմբագիր՝

Ս. Ալավերդյան

Էջադրումը և սրբագրումը՝

**Ռ. Պետրոսյանի,
Ս. Բոյաջյանի**

Չափս՝ 60x84 1/16:
20,25 տպ. մամուլ,